Trabajo Práctico
Tema 3: Modelos discretos determinísticos
Instituto de Automática
Facultad de Ingeniería
U. N. de San Juan

Alumno: Rodrigo González.

Ejercicio No 1

La secuencia de peso de un sistema lineal discreto es g (kTo) = 5e ^ (− (k −1)To) para k ≥ 1 y 0 para k = 0.
Sea u(kTo) = kTo para k ≥ 0 la entrada del sistema y To = 0.5seg el período de muestreo.
a) Encuentre la transformada z de la salida.
b) Encuentre la secuencia de salida y(kTo). Simule, obtenga gráficas y conclusiones.

a) Como g(kTo) vale 0 para k = 0 y 5e ^ (− (k −1)To) para k ≥ 1, se representa a g(kTo) en k=1 retardada un periodo de muestreo To, donde $g_1(kT_0)=5e^{-kT_0}$.

Entonces:

$$Z\{g_1(kT_0)\}=Z\{5e^{-kT_0}\}=5Z\{e^{-kT_0}\}=\frac{5}{1-e^{-T_0}z^{-1}}=\frac{z5}{z-e^{-T_0}}$$

Agregando un retardo en el dominio de Z, se obtiene la transformada Z de g(kTo):

$$G(z)=Z\{g(kT_0)\}=\frac{5z^{-1}}{1-e^{-T_0}z^{-1}}=\frac{5}{z-e^{-T_0}}$$

La secuencia u(kTo) representa una función rampa muestreada a To intervalos. Se obtiene su transformada Z por tablas:

$$U(z)=Z\{u(kT_0)\}=\frac{T_0z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{T_0z}{(z-1)^2}$$

La transformada Z de la salida es

$$Y(z)=U(z)G(z)=\frac{T_0z}{(z-1)^2}\frac{5}{(z-e^{-T_0})}=\frac{5\mathrm{T}_0z}{(z-1)^2(z-e^{-T_0})}$$

b) Para encontrar la secuencia de salida y(kTo) se debe encontrar la antitransforma de Y(z), la cual se debe expandir en fracciones parciales para encontrar su antitransforma.

$$Y(z)=\frac{5\mathrm{T}_0z}{(z-1)^2(z-e^{-T_0})}=\frac{Az}{(z-1)^2}+\frac{Bz}{(z-1)}+\frac{Cz}{(z-e^{-T_0})}=\frac{Az(z-e^{-T_0})+Bz(z-1)(z-e^{-T_0})+Cz(z-1)^2}{(z-1)^2(z-e^{-T_0})}$$

Donde: $5\mathrm{T}_0z=Az(z-e^{-T_0})+Bz(z-1)(z-e^{-T_0})+Cz(z-1)^2$

Haciendo z=1 se obtiene el valor de A: $5\mathrm{T}_0=A(1-e^{-T_0})\Rightarrow A=\frac{5\mathrm{T}_0}{1-e^{-T_0}}$

Haciendo $z=e^{-T_0}$ se obtiene el valor de C: $5\mathrm{T}_0=Ce^{-T_0}(e^{-T_0}-1)^2\Rightarrow C=\frac{5\mathrm{T}_0}{(e^{-T_0}-1)^2}=\frac{5\mathrm{T}_0}{(1-e^{-T_0})^2}$

Haciendo z=2 se obtiene el valor de B:

$$5\mathrm{T}_0 2=\frac{5\mathrm{T}_0}{1-e^{-T_0}}2(2-e^{-T_0})+B2(2-1)(2-e^{-T_0})+\frac{5\mathrm{T}_0}{(e^{-T_0}-1)^2}2(2-1)^2$$

$$10T_0=\frac{10T_0(2-e^{-T_0})}{1-e^{-T_0}}+2B(2-e^{-T_0})+\frac{10T_0}{(1-e^{-T_0})^2}\Rightarrow B(2-e^{-T_0})=5T_0-\frac{5T_0(2-e^{-T_0})}{(1-e^{-T_0})}-\frac{5T_0}{(1-e^{-T_0})^2}$$

$$B=\frac{5T_0}{(2-e^{-T_0})}-\frac{5T_0}{(1-e^{-T_0})}-\frac{5T_0}{(2-e^{-T_0})(1-e^{-T_0})^2}=5T_0\frac{(1-e^{-T_0})^2-(2-e^{-T_0})(1-e^{-T_0})-1}{(2-e^{-T_0})(1-e^{-T_0})^2}$$

$$B=5T_0\frac{1-2e^{-T_0}+e^{-2T_0}-(2-2e^{-T_0}-e^{-T_0}+e^{-2T_0})-1}{(2-e^{-T_0})(1-e^{-T_0})^2}=5T_0\frac{-2e^{-T_0}+e^{-2T_0}-2+3e^{-T_0}-e^{-2T_0}}{(2-e^{-T_0})(1-e^{-T_0})^2}$$

$$B=5T_0\frac{(-2+3)e^{-T_0}-2}{(2-e^{-T_0})(1-e^{-T_0})^2}\Rightarrow B=\frac{-5T_0}{(1-e^{-T_0})^2}$$

La expresión de Y(z) con los valores de A, B y C resueltos:

$$Y(z)=\frac{Az}{(z-1)^2}+\frac{Bz}{(z-1)}+\frac{Cz}{(z-e^{-T_0})}=\frac{5T_0}{1-e^{-T_0}}\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{5T_0}{(1-e^{-T_0})^2}\frac{z}{(z-1)}+\frac{5T_0}{(1-e^{-T_0})^2}\frac{z}{(z-e^{-T_0})}$$

La antitransforma Z de Y(z) se encuentra mediante tablas:

$$y(kT_0)=5T_0\left[\frac{k}{1-e^{-T_0}}-\frac{1}{(1-e^{-T_0})^2}+\frac{e^{-kT_0}}{(1-e^{-T_0})^2}\right]$$. Remplanzando por el valor de Toy resolviendo:

$$y(kT_0)=2.5\left[\frac{k}{1-e^{-0.5}}-\frac{1}{(1-e^{-0.5})^2}+\frac{e^{-0.5k}}{(1-e^{-0.5})^2}\right]=6.35k+16.15(e^{-0.5})^k-16.15$$

$$y(kT_0)=6.35k+16.15(0{,}6065)^k-16.15$$

Los primero 10 valores de y(kTo):

.

k	y(kTo)
0	0,000
1	-0,005
2	2,491
3	6,503
4	11,435
5	16,925
6	22,754
7	28,788
8	34,946
9	41,179
10	47,459

Tabla 1.1

Se simula el sistema en Simulink:

Fig. 1.1

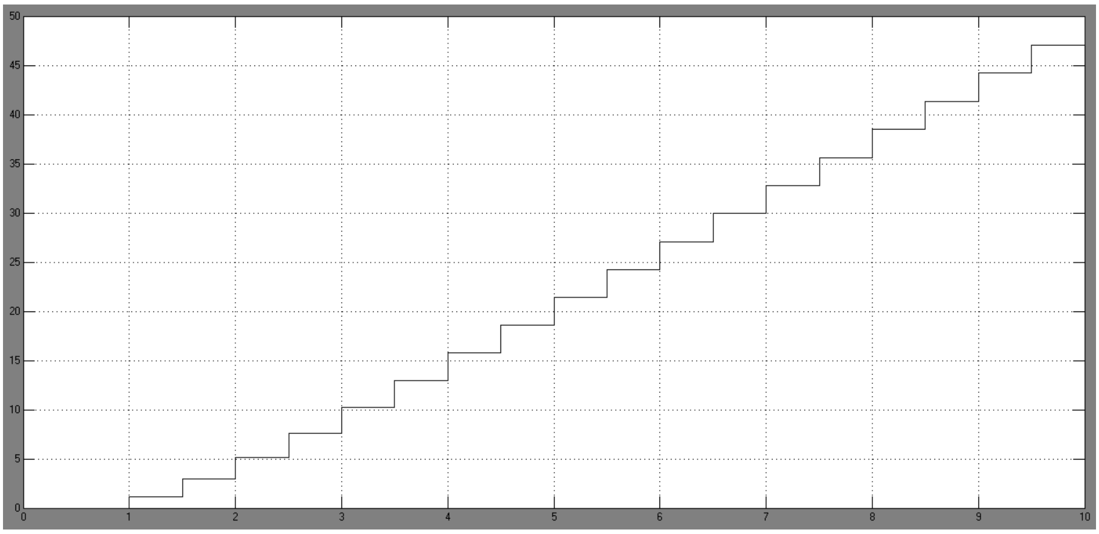


Fig 1.2

La figura 1.1 muestra el modelo del sistema en Simulink. La figura 1.2 representa la señal de salida y(kTo). Si bien se ha simulado hasta el valor k=10, llevando la simulación a valores mucho mayores se observa que el valor de y(kTo) crece casi linealmente con el aumento de k, por lo que se considera al sistema como inestable.

Ejercicio N° 2

Encuentre la función en z dada la ecuación en diferencia x(k + 2) − x(k + 1) + 0.25 x(k) = u (k + 2). x(0) = 0, x(1) = 2, u(k) = 1 k ≥ 0

Se aplica la igualdad $Z[\![x(n-k)]\!]=z^{-k}X(z)$

$$\Rightarrow z^2X(z)-zX(z)+0.25X(z)=z^2U(z)\Rightarrow X(z)(z^2-z+0.25)=z^2U(z)$$

La función de salida en z resulta ser:

$$\frac{X(z)}{U(z)}=\frac{z^2}{(z^2-z+0.25)}=\frac{1}{(0.25z^{-2}-z^{-1}+1)}$$

Ejercicio N° 3

Obtenga la respuesta y(kT) de $\frac{y(s)}{u*(s)}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ *donde u(t) es un escalón unitario y u*(t) es la versión impulso muestreada de u(t). Suponga T = 0.1 seg. Simule. Obtenga gráficas y conclusiones.*

La función de transferencia en z del escalón unitario se expresa con la siguiente ecuación: $U(z)=\frac{z}{z-1}$,

donde U*(z) es la misma expresión más un retenedor de orden cero: $U*(z)=\frac{z}{z-1}\frac{1-z^{-1}}{s}$

La transformada z de y(s): $Y(z)=U*(z)Z\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\}=\frac{z}{z-1}\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right\}$

$\Rightarrow Y(z)=Z\left\{\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right\}$ La expresión entre corchetes se descompone en fracciones simples para poder encontrar su transformada z.

$$\left\{\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right\}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+1)}+\frac{C}{(s+2)}=\frac{A(s+1)(s+2)+Bs(s+2)+Cs(s+1)}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\Rightarrow 1 = A(s+1)(s+2) + B\,s(s+2) + C\,s(s+1)$$

Haciendo s = 0: $\Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Haciendo s = -1: $\Rightarrow B(-1)(-1+2) = 1 \Rightarrow B = -1$

Haciendo s = -2: $\Rightarrow C(-2)(-2+1) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

La transformada z de y(s) se expresa como: $Z\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)}\right\} = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_0}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-2T_0}}$

Antitransformando esta última expresión se encuentra ecuación que representa a y(kTo):

$$y(kT_0) = \frac{1}{2} - e^{-kT_0} + \frac{1}{2}e^{-2kT_0}$$

Haciendo To= 0,1 seg, los primeros 10 valores son:

k	kTo (seg)	y(kTo)
0	0,00	0,000
1	0,10	0,005
2	0,20	0,016
3	0,30	0,034
4	0,40	0,054
5	0,50	0,077
6	0,60	0,102
7	0,70	0,127
8	0,80	0,152
9	0,90	0,176
10	1,00	0,200

Tabla 3.1

Se simula el sistema en Simulink con el siguiente modelo:

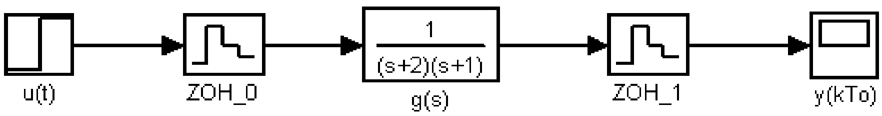


Fig. 3.1

La representación gráfica de y(kTo):

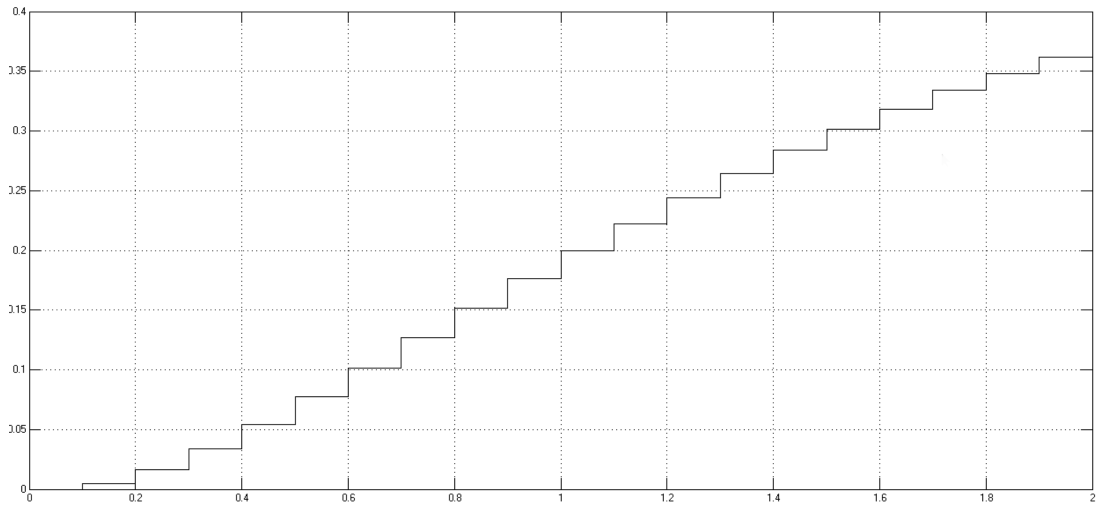


Fig. 3.2

Comparando los valores de la tabla 3.1 y la figura 3.2 se observa que hay coincidencia entre los valores encontrados en forma analítica y los obtenidos mediante simulación.

Ejercicio N° 4:
Obtener la función de transferencia de lazo cerrado discreta del siguiente sistema,

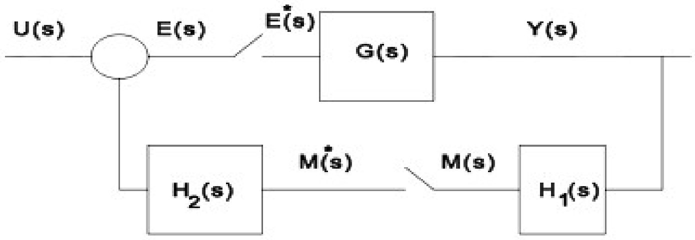


Fig. 4.1

Los bloques que a su entrada tienen un muestreador sincrónico pueden representarse en términos de transformada Z. Estos son:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{E^d(s)} \qquad [1]$$

$$H_2(s)=\frac{X(s)}{M^d(s)} \quad \text{donde} \quad X(s)=U(s)-E(s) \Rightarrow H_2(s)=\frac{U(s)-E(s)}{M^d(s)} \qquad [2]$$

El bloque que no tiene un muestreador sincrónico a su entrada y por ende no se puede representar en términos de transformada Z es:

$$H_1(s)=\frac{M(s)}{Y(s)} \qquad [3]$$

Los bloques G(s) y H1(s) están en cascada y pueden agruparse en un único bloque $H_3(s)$:

$$H_3(s)=G(s)*H_1(s)=\frac{Y(s)}{E^d(s)}\frac{M(s)}{Y(s)}=\frac{M(s)}{E^d(s)} \qquad [4]$$

Las transformadas Z de los bloques [1], [3] y [4] pueden representarse directamente cambiando la variable s por la variable z.

$$G(z)=\frac{Y(z)}{E(z)} \quad , \quad H_2(z)=\frac{U(z)-E(z)}{M(z)} \quad , \quad H_3(z)=\frac{M(z)}{E(z)}$$

Se operan las expresiones para obtener la relación buscada $\frac{Y(s)}{U(s)}$:

$$U(z)=E(z)+[H_2(z)M(z)]=E(z)+[H_2(z)H_3(z)E(z)]=E(z)[1+H_2(z)H_3(z)]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(z)=E(z)[1+H_2(z)H_3(z)]=\frac{Y(z)}{G(z)}[1+H_2(z)H_3(z)]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{G(z)}{[1+H_2(z)H_3(z)]}$$

Ejercicio N° 5:
Encontrar y para el siguiente sistema:*

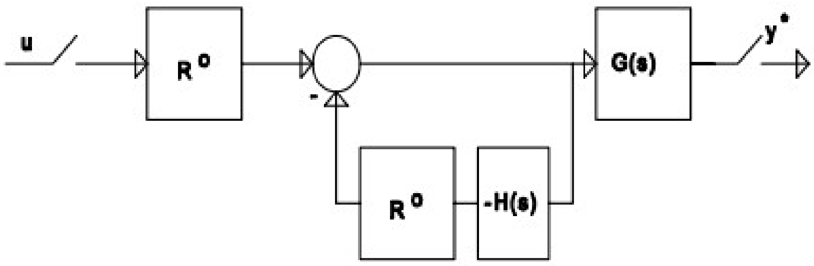


Fig. 5.1

Al no contar el sistema con un muestreador sincrónico en el bucle de realimentación no se puede aplicar transformada Z directamente. Como existe un bloque Retenedor de orden cero a la salida del bloque -H(s), el mismo puede ser remplazado por un muestreador sincrónico ya que la señal realimentada será la misma. El bloque Retenedor de orden cero que se encuentra a la entrada puede colocarse dentro del bucle de realimentación y remplazarse por un muestreador sincrónico.

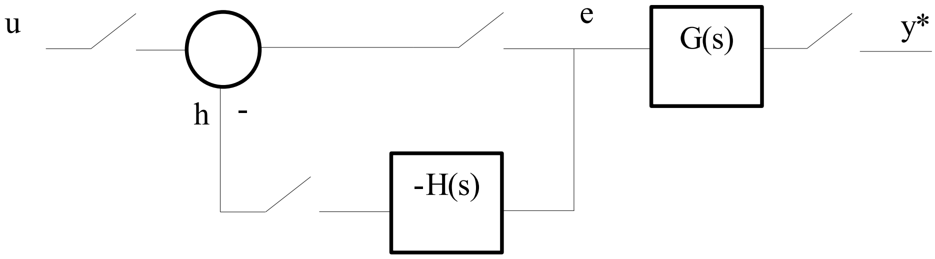


Fig. 5.2

En primer lugar se busca la función de transferencia en el dominio de Z del bloque realimentado:

$$e(z)=u(z)-h(z)=u(z)+e(z)H(z)\Rightarrow e(z)-e(z)H(z)=u(z)\Rightarrow e(z)[1-H(z)]=u(z)\Rightarrow$$

$$\frac{e(z)}{u(z)}=\frac{1}{[1-H(z)]}$$

Con este resultado, la figura 5.2 se simplifica de la siguiente manera:

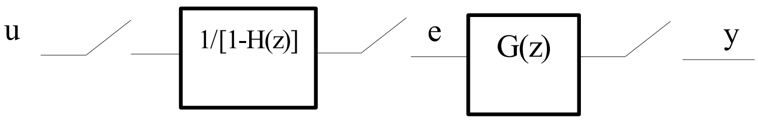


Fig 5.3

Obteniéndose como resultado:

$$\Rightarrow\frac{y(z)}{u(z)}=\frac{G(z)}{[1+H(z)]}$$

Ejercicio N° 6:
Considere el sistema

$$G(z)=\frac{1-0.5z^{-1}}{(1-0.3z^{-1})(1+0.7z^{-1})}$$

Obtenga la respuesta de este sistema para una entrada escalón unitario muestreada. Solucione este problema en forma analítica y computacional.

$$G(z)=\frac{1-0.5z^{-1}}{(1-0.3z^{-1})(1+0.7z^{-1})}=\frac{z-0.5}{(z-0.3)(z+0.7)}$$

La transformada Z del escalón unitario se define como: $U(z)=\frac{z}{(z-1)}$

Entonces la respuesta del sistema es:

$$Y(z)=U(z)G(z)=\frac{(z-0.5)}{(z-0.3)(z+0.7)}\frac{z}{(z-1)}=\frac{(z^2-0.5z)}{(z-0.3)(z+0.7)(z-1)}$$

Dicha ecuación se resuelve por el método de expansión en fracciones parciales, donde:

$$Y(z)=\frac{(z^2-0.5z)}{(z-0.3)(z+0.7)(z-1)}=\frac{Az}{(z-0.3)}+\frac{Bz}{(z+0.7)}+\frac{Cz}{(z-1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{Az[(z+0.7)(z-1)]+Bz[(z-0.3)(z-1)]+Cz[(z-0.3)(z+0.7)]}{(z-0.3)(z+0.7)(z-1)}$$

Comparando expresiones:

$$\Rightarrow Az[(z+0.7)(z-1)]+Bz[(z-0.3)(z-1)]+Cz[(z-0.3)(z+0.7)]=(z^2-0.5z)$$

Haciendo z= 0.3:

$$\Rightarrow 0.3\mathrm{A}[(0.3+0.7)(0.3-1)]=0.3^2-0.5(0.3)\Rightarrow 0.3\mathrm{A}[-(0.7)]=-0.06\Rightarrow A=0.2857$$

Haciendo z= -0.7:

$$\Rightarrow -0.7\mathrm{B}[(-0.7-0.3)(-0.7-1)]=(-0.7)^2-0.5(-0.7)\Rightarrow 0.7B[(-1.7)]=0.84\Rightarrow B=-0.7059$$

Haciendo z= 1:

$$\Rightarrow C[(1-0.3)(1+0.7)]=(1^2-0.5)\Rightarrow C[(0.7)(1.7)]=(0.5)\Rightarrow C=0.4202$$

Remplanzando los valores encontrados y antitransformando:

$$y(k)=(0.2857)(0.3)^k-(0.7059)(-0.7)^k+(0.4202)$$

Los primeros 25 valores de y(k):

k	**y(k)**	**k**	**y(k)**	**k**	**y(k)**
0	0,000	10	0,400	20	0,420
1	1,000	11	0,434	21	0,421
2	0,100	12	0,410	22	0,420
3	0,670	13	0,427	23	0,420
4	0,253	14	0,415	24	0,420
5	0,540	15	0,424	25	0,420
6	0,337	16	0,418		
7	0,478	17	0,422		
8	0,380	18	0,419		
9	0,449	19	0,421		

Tabla 6.1

El sistema modelado en Simulink:

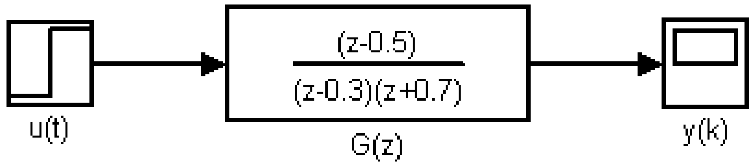


Fig. 6.1

La representación gráfica de y(k):

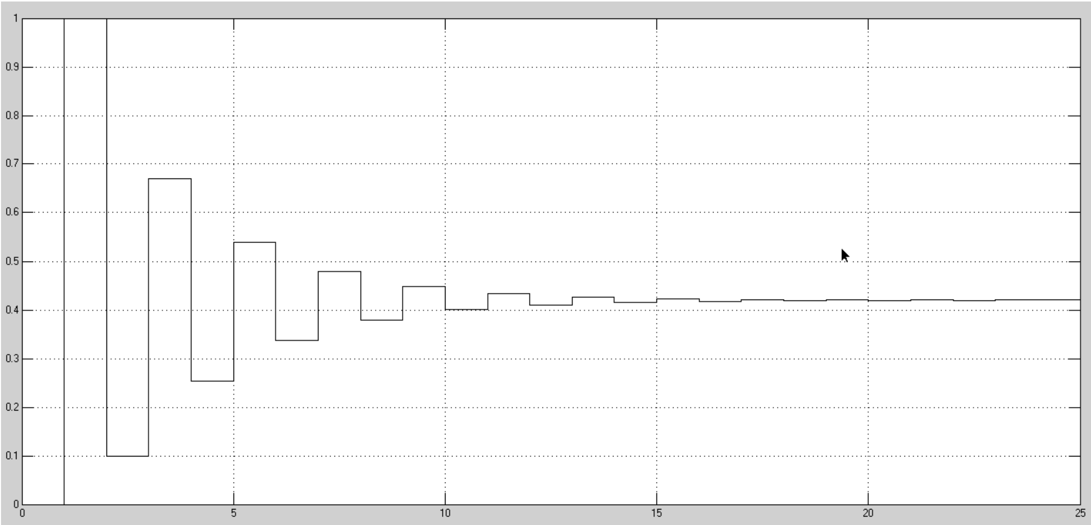


Fig. 6.2

Comparando los valores obtenidos en la figura 6.2 y los representados en la tabla 6.1 se observa coincidencia entre ellos.

Ejercicio N° 7:

Obtenga la secuencia de peso g(k) del sistema descrito por la ecuación en diferencia:

$$y(k) - a\,y(k-1) = x(k), -1 < a < 1$$

Si dos sistemas descriptos por esta ecuación se conectan en serie. ¿Cuál es la secuencia del sistema resultante? Simule y obtenga gráficas.

Para encontrar g(k) primeramente se debe buscar la relación $G(z) = \dfrac{y(z)}{x(z)}$ y luego antitransformar G(z).

Aplicando la transformada Z a la ecuanción de diferencia planteada:

$$y(z) - az^{-1}\,y(z) = x(z) \Rightarrow y(z)[1 - az^{-1}] = x(z) \Rightarrow G(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{1}{[1 - az^{-1}]} = \frac{z}{(z-a)}$$

La antitransformada Z de G(z), es decir, la secuencia de peso del sistema es: $g(k) = a^k$

Si dos sistemas descriptos por la ecuación de diferencia planteada se conectan en serie, la Gs(z) es:

$$G_s(z) = \frac{z}{z-a}\frac{z}{z-a} = \frac{z^2}{(z-a)^2} = \frac{Az}{(z-a)^2} + \frac{Bz}{(z-a)} = \frac{Az + Bz(z-a)}{(z-a)^2}$$

Igualando los numeradores se obtiene la ecuación: $Az + Bz(z-a) = z^2$

Haciendo z=a: $A\,a = a^2 \Rightarrow A = a$

Haciendo z=1 $A + B(1-a) = 1 \Rightarrow B(1-a) = 1 - a \Rightarrow B = 1$

Remplanzando los valores obtenidos de A y B en Gs(z): $G_s(z) = \dfrac{az}{(z-a)^2} + \dfrac{z}{(z-a)}$

Antitransformando mediante tablas: $g(k) = a\,k\,a^{k-1} + a^k \Rightarrow g(k) = a^k(k+1)$

Pudiendo tomar la variable a valores entre 1 y -1, se fija el valor de *a* igual a 0,5.
Para obtener la representación gráfica de la secuencia de peso, se estimula al sistema con un impulso de 0,1 segundos.

El sistema modelado en Simulink de la primera secuencia de peso:

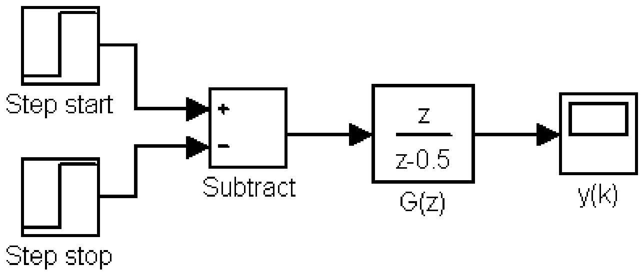


Fig. 7.1

La representación gráfica de g(k):

Fig. 7.2

El sistema modelado en Simulink de la segunda secuencia de peso:

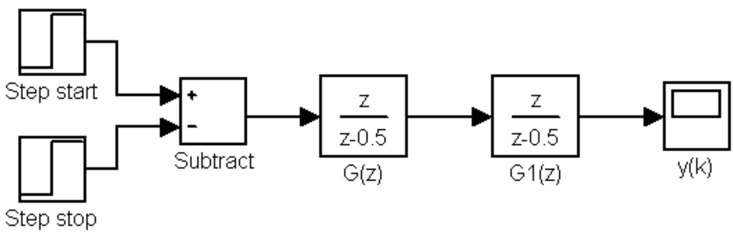


Fig. 7.3

La representación gráfica de gs(k):

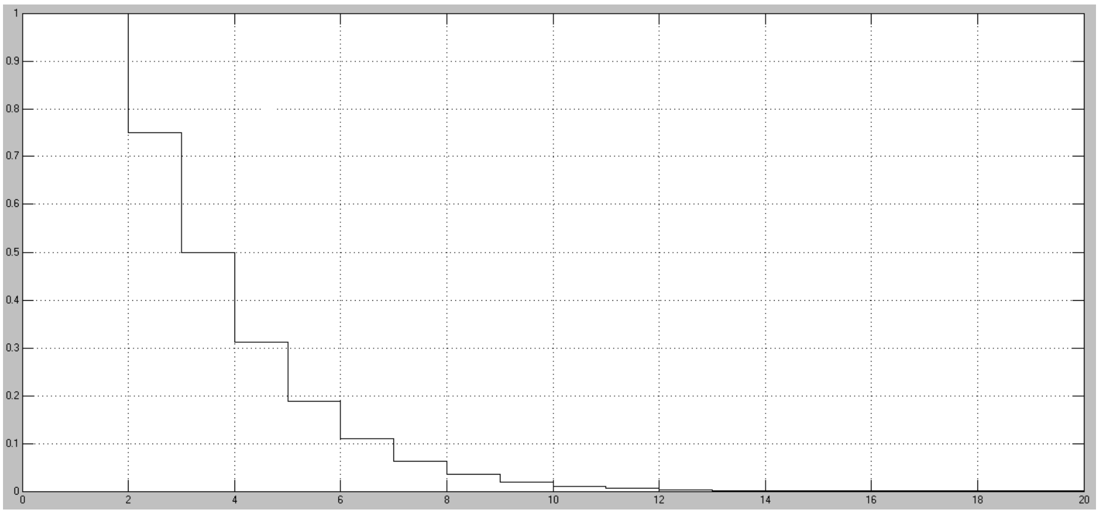


Fig 7.4

Ejercicio N° 8:

Considere el sistema $y(k)-y(k-1)+0.24\,y(k-2)=x(k)+x(k-1)$ *donde x(k) es la entrada e y(k) es la salida. Determine la secuencia de peso del sistema. Suponga y(k)=0 para k<0. Determine la y(k) cuando x(k) es la secuencia escalón unitario. Resuelva analítica y computacionalmente.*

Para encontrar la secuencia de peso del sistema primero se debe aplicar la transformada Z a la expresión dada para encontrar la relación $G(z)=\frac{y(z)}{y(z)}$, para luego antitransformar G(z) y encontrar la expresión de g(k). Entonces:

$$y(z)-z^{-1}y(z)+0.24\,z^{-2}y(z)=x(z)+z^{-1}x(z)\Rightarrow y(z)[1-z^{-1}+0.24\,z^{-2}]=x(z)[1+z^{-1}]\Rightarrow$$
$$\frac{y(z)}{x(z)}=\frac{[1+z^{-1}]}{[1-z^{-1}+0.24\,z^{-2}]}=\frac{[z^2+z^1]}{[z^2-z^1+0.24]}$$

La expresión obtenida se pasa a formato de polos y ceros para una mejor adaptación al método de resolución por expansión en fracciones parciales:

$$\frac{y(z)}{x(z)}=\frac{z(z+1)}{(z-0.6)(z-0.4)}=\frac{Az}{(z-0.6)}+\frac{Bz}{(z-0.4)}=\frac{Az(z-0.4)+Bz(z-0.6)}{(z-0.6)(z-0.4)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(z+1)=Az(z-0.4)+Bz(z-0.6)$$

Haciendo z=0.6:

$$0.6(0.6+1)=A\,0.6(0.6-0.4)\Rightarrow 0.96=0.12\,A\Rightarrow A=8$$

Haciendo z=0.4:

$$0.4(0.4+1)=B\,0.4(0.4-0.6)\Rightarrow 0.56=-0.08\,B\Rightarrow B=-7$$

Resultando: $g(z)=\frac{8z}{(z-0.6)}-\frac{7z}{(z-0.4)}\Rightarrow g(k)=8(0.6^k)-7(0.4^k)$

La respuesta a una secuencia escalón unitario para el sistema dado:

$$y(z)=\frac{z(z+1)}{(z-0.6)(z-0.4)}\frac{z}{(z-1)}=\frac{z^2(z+1)}{(z-0.6)(z-0.4)(z-1)}=\frac{Az}{(z-0.6)}+\frac{Bz}{(z-0.4)}+\frac{Cz}{(z-1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{Az(z-0.4)(z-1)+Bz(z-0.6)(z-1)+Cz(z-0.6)(z-0.4)}{(z-0.6)(z-0.4)(z-1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2(z+1) = Az(z-0.4)(z-1) + Bz(z-0.6)(z-1) + Cz(z-0.6)(z-0.4)$$

Haciendo z=0.6:

$$\Rightarrow 0.6^2(0.6+1) = A(0.6)(0.6-0.4)(0.6-1) \Rightarrow 0.576 = (-0.048)A \Rightarrow A = -12$$

Haciendo z=0.4:

$$0.4^2(0.4+1) = B\,0.4(0.4-0.6)(0.4-1) \Rightarrow 0.224 = (0,048)B \Rightarrow B = 4,66$$

Haciendo z=1:

$$\Rightarrow 1^2(1+1) = C(1-0.6)(1-0.4) \Rightarrow 2 = (0,24)C \Rightarrow C = 8,33$$

La tranformada Z de la salida:

$$y(z) = -12\frac{z}{(z-0.6)} + 4.66\frac{z}{(z-0.4)} + 8.33\frac{z}{(z-1)}$$

La secuencia de salida para una entrada escalón unitario:

$$y(k) = -12(0.6^k) + 4.66(0.4^k) + 8.33$$

Los primeros 25 valores de k:

k	y(k)	k	y(k)	k	y(k)
0	0,990	10	8,258	20	8,330
1	2,994	11	8,287	21	8,330
2	4,756	12	8,304	22	8,330
3	6,036	13	8,314	23	8,330
4	6,894	14	8,321	24	8,330
5	7,445	15	8,324	25	8,330
6	7,789	16	8,327		
7	8,002	17	8,328		
8	8,132	18	8,329		
9	8,210	19	8,329		

Tabla 8.1

El sistema modelado en Simulink:

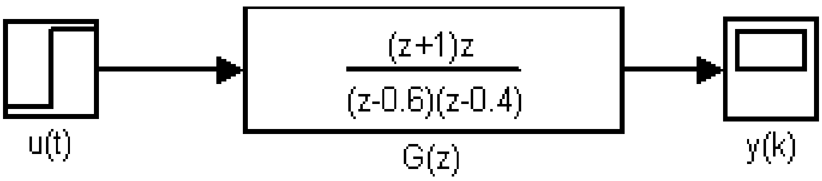


Fig. 8.1

La representación gráfica de y(k):

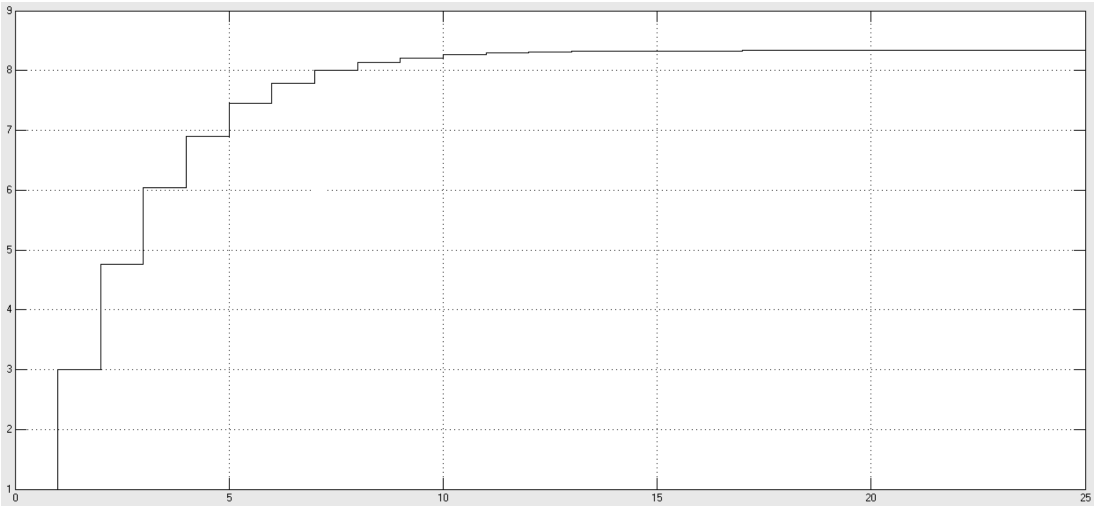


Fig. 8.2

Comparando los valores mostrados en la figura 8.2 con los representados en la tabla 8.1 se observa coincidencia entre ellos, por lo que las soluciones analítica y simulada coinciden.

Ejercicio N° 9:
Un sistema masa-resorte está gobernado por la siguiente ecuación diferencial $\ddot{y}+4\,\dot{y}+400\,y=2\,u(t)$
a) Encontrar la representación en variables de estado si el desplazamiento y la velocidad de la masa se toman como variables de estado.
b) Si el sistema está manejado por un retenedor de orden cero y seguido de un muestreador que muestrea el desplazamiento de la masa, encontrar la representación en variables de estado discreto del sistema para To = 0.05seg.
c) Simular el sistema considerando que u(t) = sen(2t). Graficar posición y velocidad de la masa vs tiempo. Obtener conclusiones.

a) Considerando a y como la representación del desplazamiento (o posición) de la masa en un sistema referenciado, su velocidad es la derivada, es decir $\dot{y}$. Considerando las igualdades $x_1=y$ y $x_2=\dot{y}=\dot{x}_1$, la ecuación diferencial dada se puede expresar como $\dot{x}_2=2\,u(t)-4\,x_2-400\,x_1$. Utilizando todas estas expresiones podemos representar al sistema en el espacio de estado:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -400 & -4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}.u(t) \quad \text{e} \quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$, donde

$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -400 & -4\end{bmatrix}$, matriz del sistema. $B=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$, matriz de entrada, y $C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$, matriz de salida.

$$\Rightarrow \begin{aligned}\dot{x}(t)&=A\,x(t)+B\,u(t)\\ y(t)&=C\,x(t)\end{aligned}$$

b) Para representar el sistema en espacio de estados discreto se utilizan funciones definidas en la herramienta de cálculo matemático Matlab. Primero se definen las ecuaciones del espacio de estado continuo con el comando ss, cargando el valor de las matrices A, B y C:

```
>> SYS = ss (A,B,C,0)
```

Luego se obtiene el modelo discretizado del sistema con la función *c2d*. En dicho comando se especifica que las entradas del sistema están afectadas por un retenedor de orden cero.

```
>> SYSD = c2d(SYS,0.05,'zoh')
```

Las nuevas matrices A, B y C para el modelo discretizado con To = 0.05 seg:

$$A=\begin{bmatrix} 0.569 & 0.03814 \\ -15.26 & 0.4164 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 0.002155 \\ 0.07628 \end{bmatrix} \quad , \text{y} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Considerando la representación del sistema en ecuaciones de estado, el mismo modelado en Simulink:

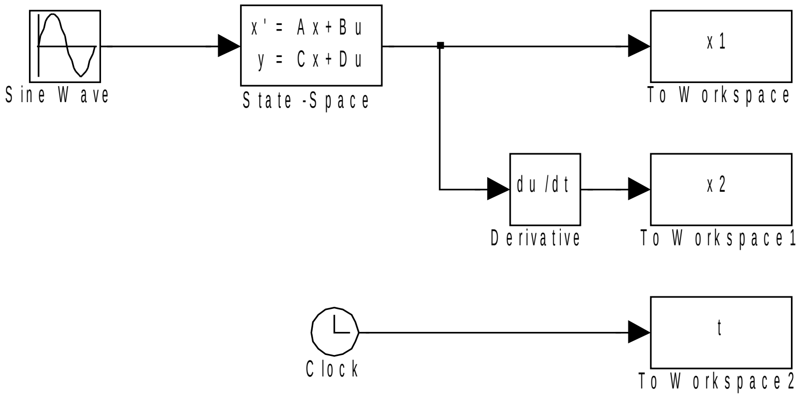


Fig. 9.1

La representación gráfica del desplazamiento y la velocidad según este modelo:

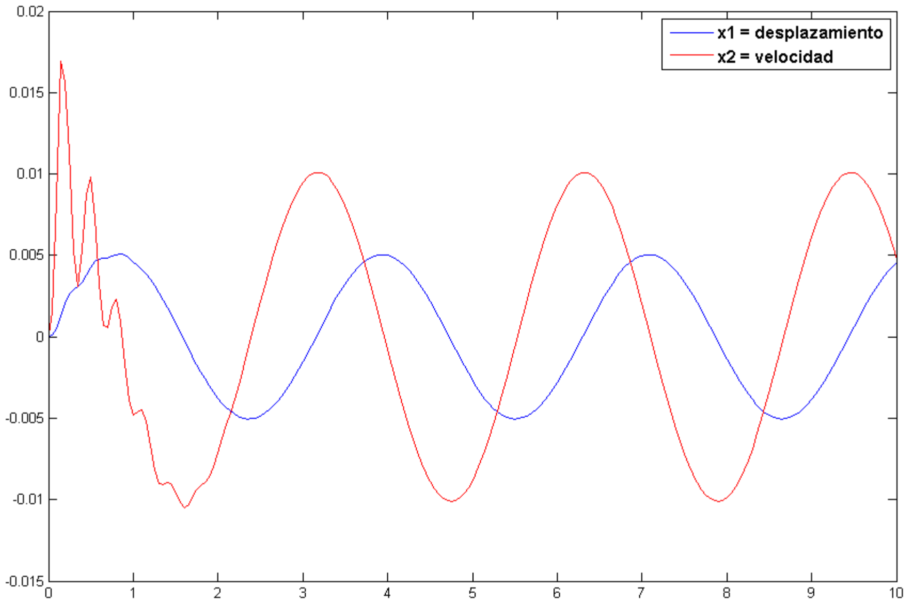


Fig. 9.2

Observando la figura 9.2 se verifica que la x2 (velocidad) está adelantada respecto a la x1 (desplazamiento) 90º, lo cual es esperable ya que x2 es igual a la derivada de x1.

Ejercicio N° 10

Dada la figura siguiente en donde se muestra la respuesta temporal en función de la ubicación de un par de polos complejos conjugados de un sistema, dar diferente ubicación de polos para verificar los casos mostrados realizando simulaciones.

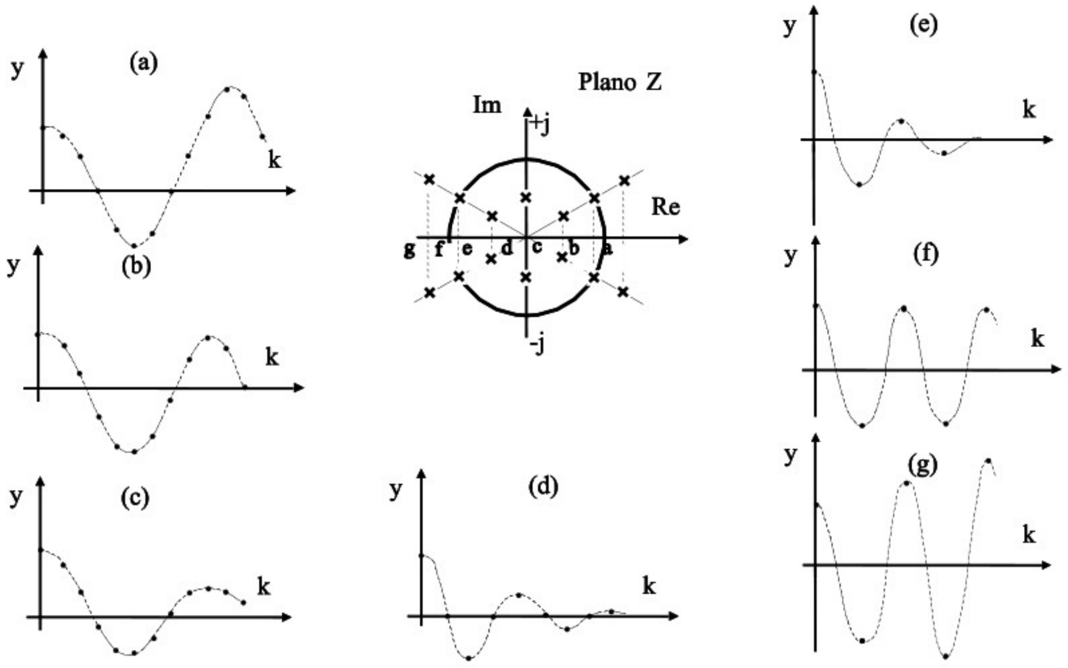
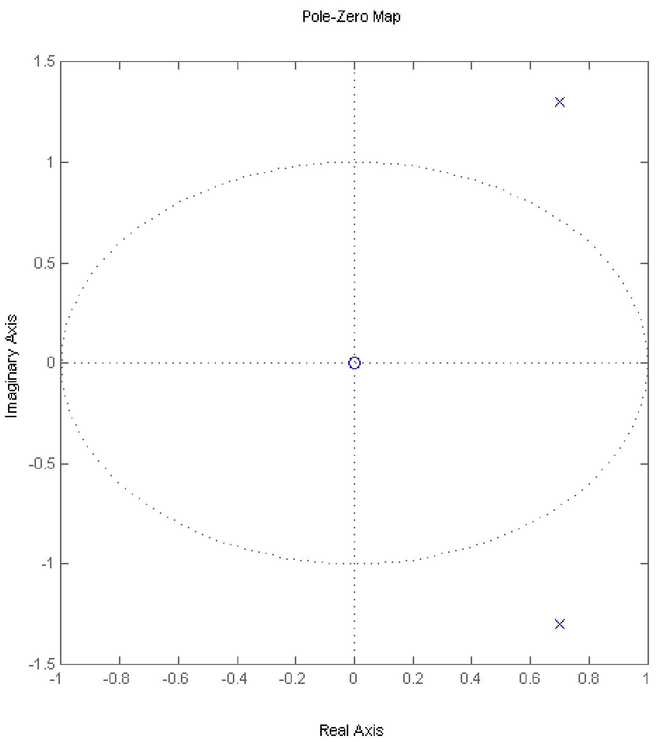
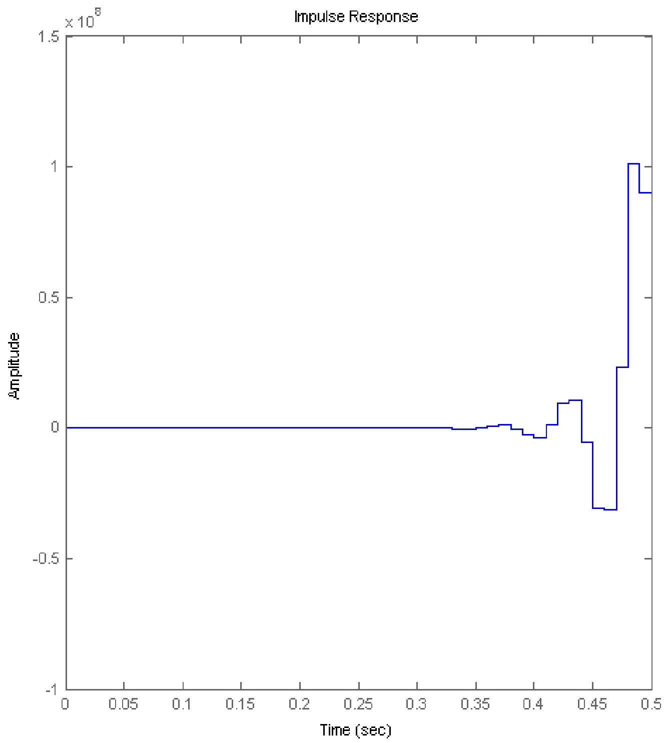


Fig 10.1

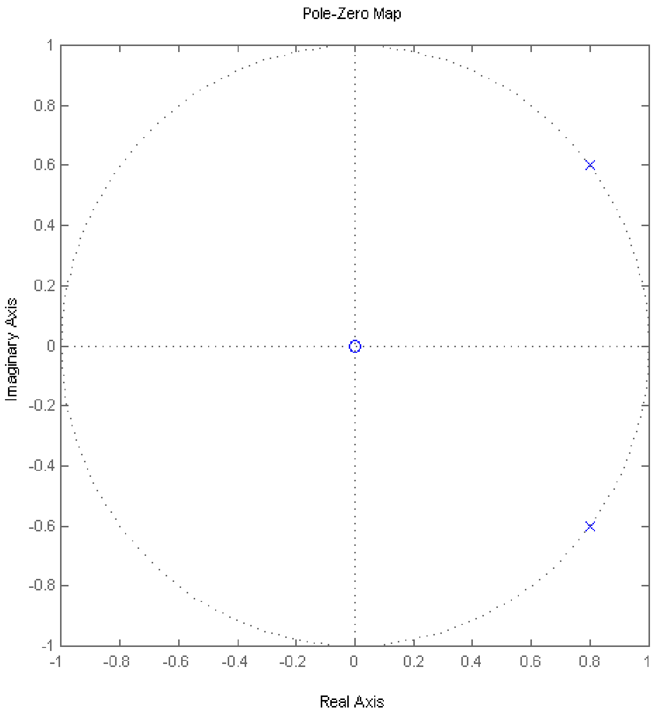
Se define un sistema con una ecuación de transferencia en transformada z del tipo polos-ceros, en general $y(z)=\dfrac{z}{(z+a)(z+b)}$. Para diferentes valores de los polos complejos configados a y b se pueden obtener las gráficas solicitadas:

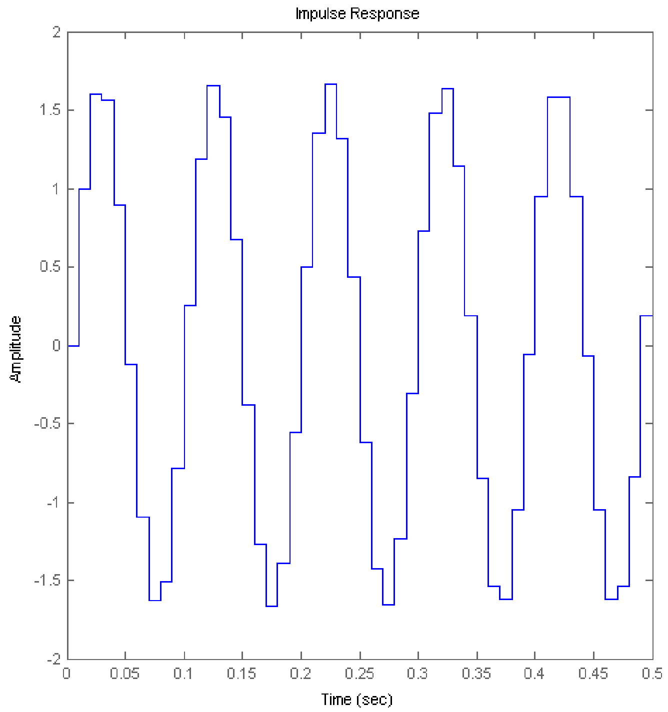
Caso a: $y(z)=\dfrac{z}{(z+0.7+1.3\mathrm{i})(z+0.7-1.3\mathrm{i})}$



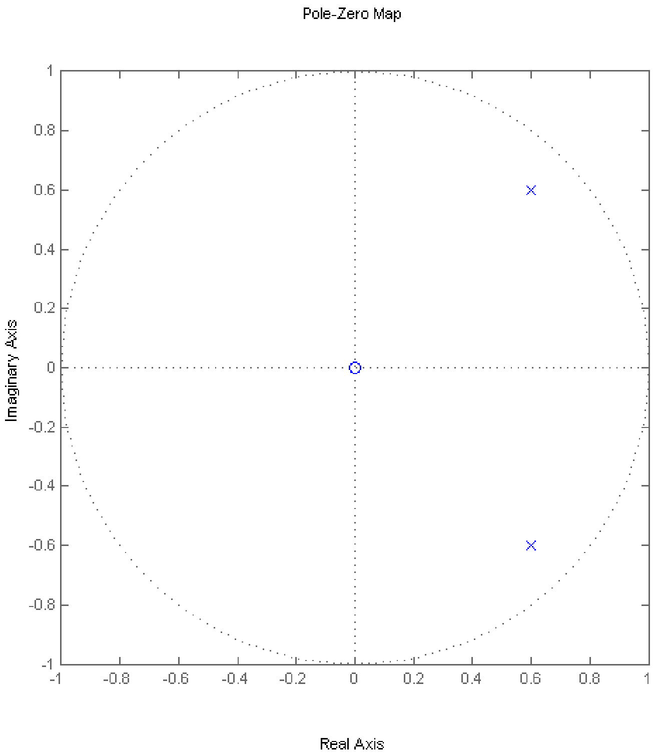


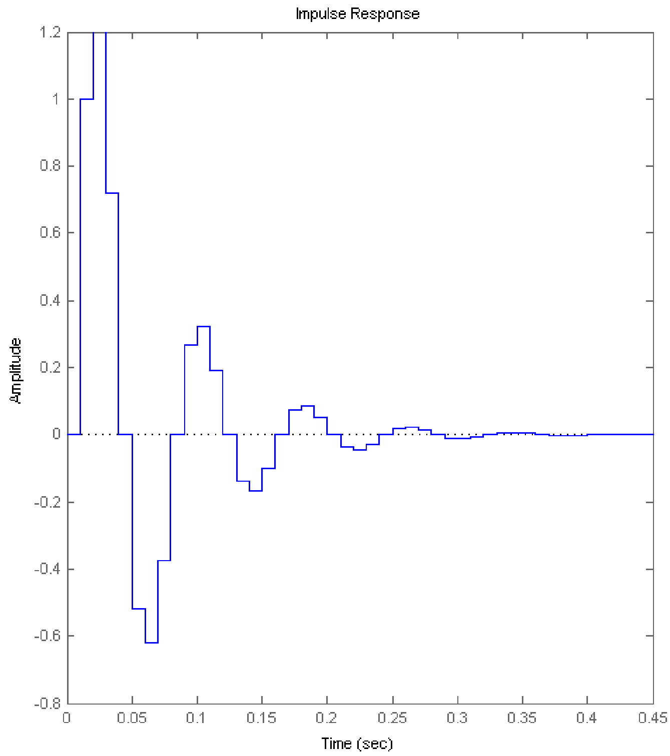
Caso b: $$y(z)=\frac{z}{(z+0.8+0.6\mathrm{i})(z+0.8-0.6\mathrm{i})}$$



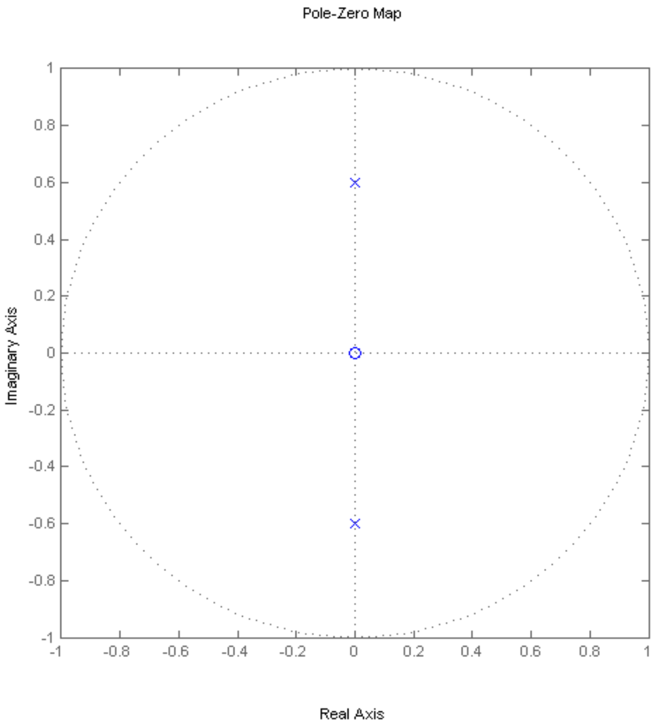


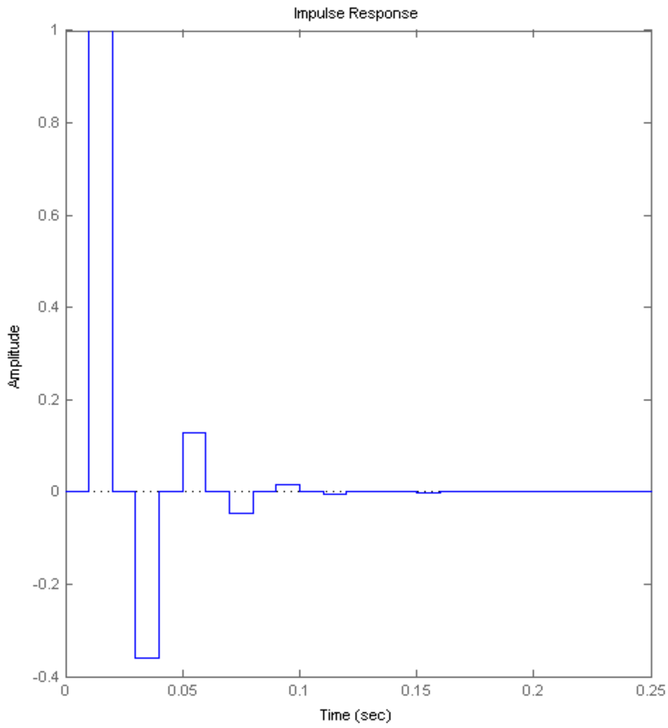
Caso c: $$y(z)=\frac{z}{(z+0.6+0.6\mathrm{i})(z+0.6-0.6\mathrm{i})}$$

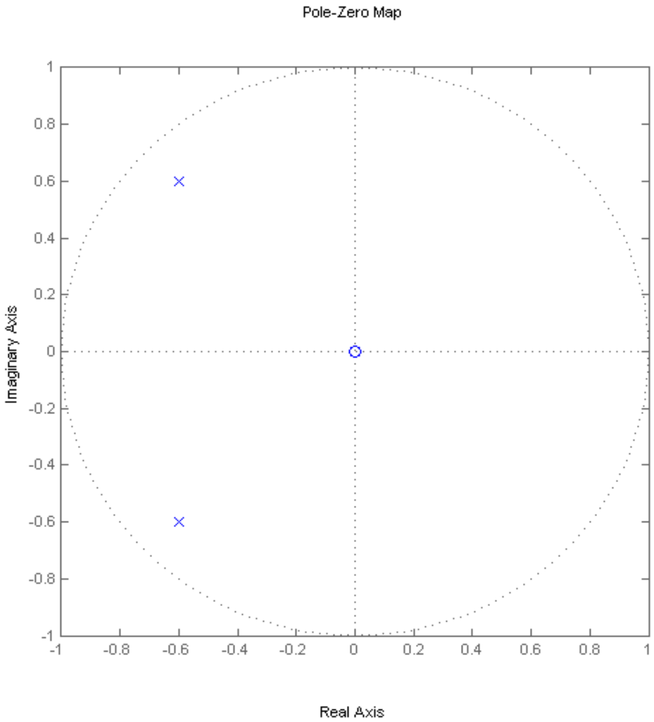


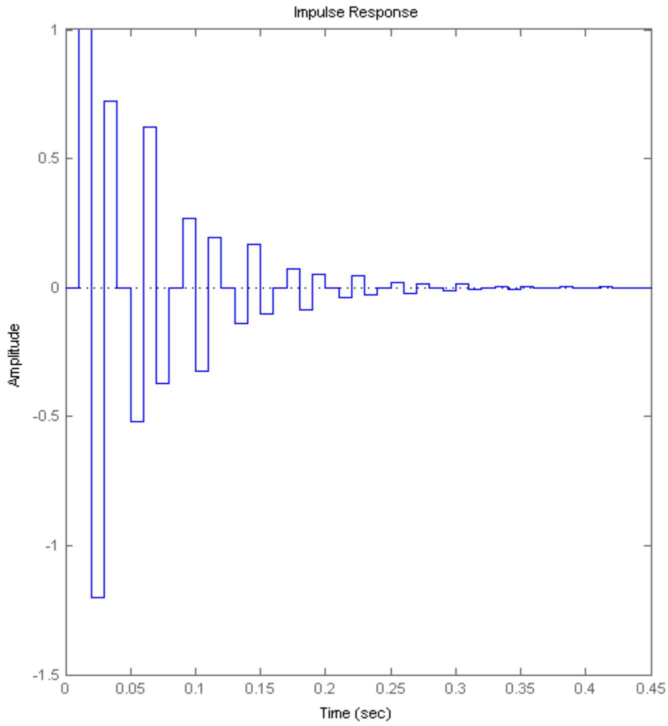


Caso d: $y(z) = \dfrac{z}{(z+0.6\mathrm{i})(z-0.6\mathrm{i})}$



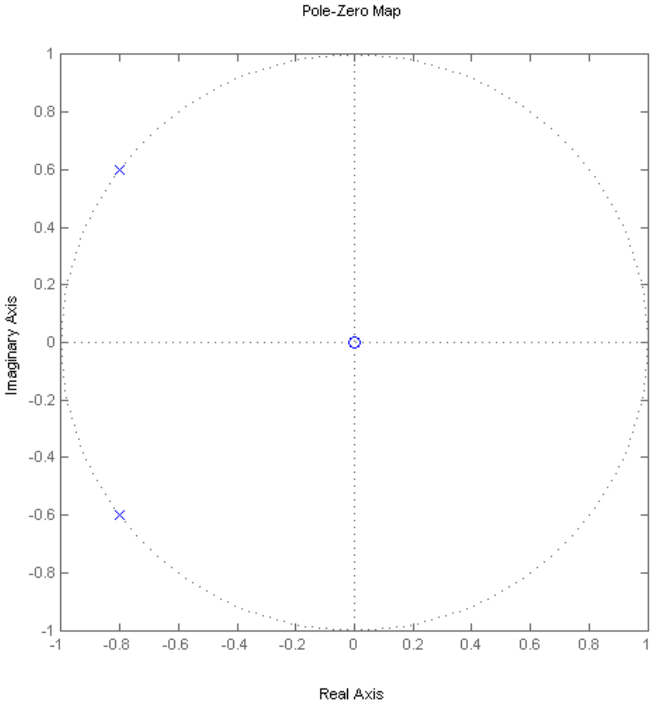


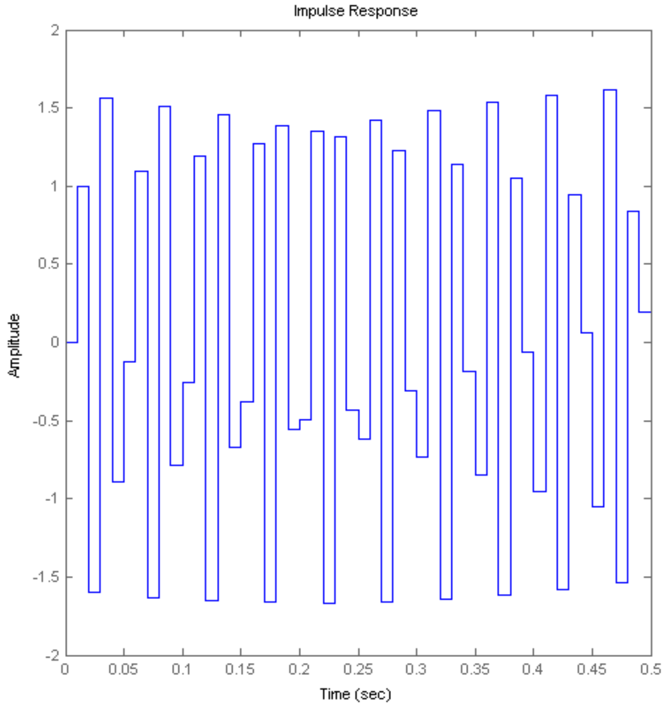




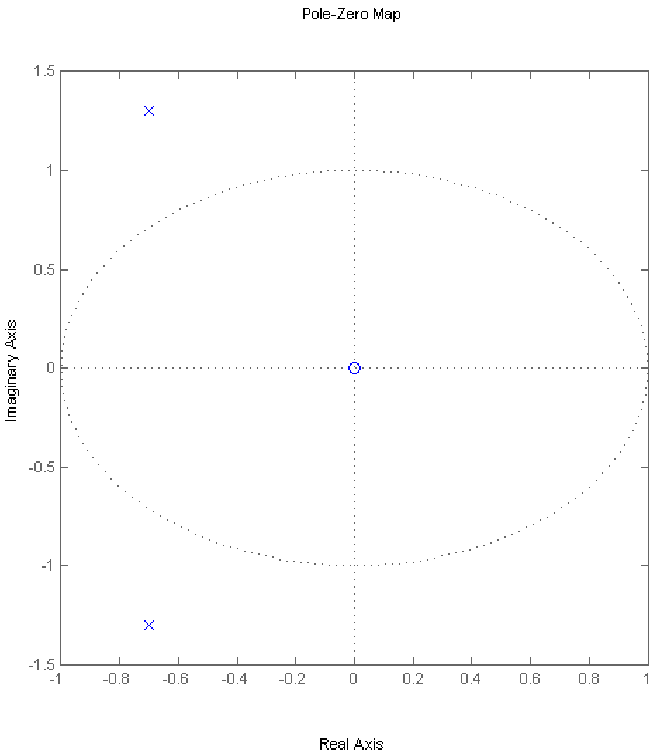
Caso e: $y(z) = \dfrac{z}{(z-0.6+0.6\mathrm{i})(z-0.6-0.6\mathrm{i})}$

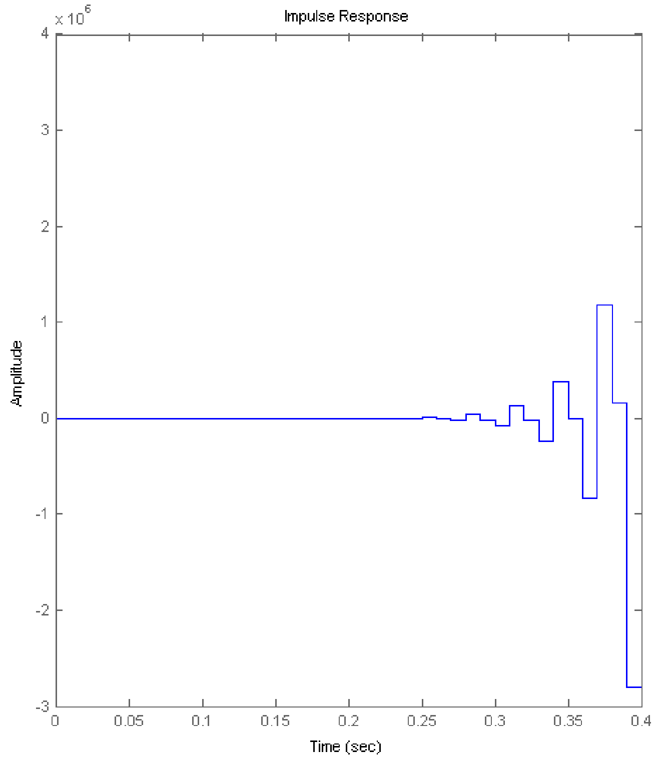
Caso f: $y(z)=\dfrac{z}{(z-0.8+0.6i)(z-0.8-0.6i)}$





Caso g: $y(z)=\dfrac{z}{(z-0.7+1.3i)(z-0.7-1.3i)}$





Ejercicio N° 11

Determine en el siguiente sistema las condiciones que verifican los parámetros a, b, c, y d para que:
a) El sistema sea estable.
b) Sea controlable.
c) Sea observable.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

d) Obtener la función de transferencia $G(z) = \dfrac{y(z)}{u(z)}$

e) Verificar que cuando se cumplen las condiciones para que el sistema sea no observable (punto c) existe cancelación entre polos y ceros de G(z).

a) Un sistema es estable si los autovalores de la matriz A son menores a 1, en otras palabras, si los polos del sistema se encuentran dentro del círculo unitario. Los autovalores de la matriz A o polos del sistema se obtienen de la siguiente manera:

$$|z.I - A| = \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} z-a & -b \\ -c & z-b \end{bmatrix} \right| = (z-a)(z-d) - bc \Rightarrow z^2 - (a+d)z + ad - bc$$

Siendo el producto de 2 polos $(z-z_1)(z-z_2) = z^2 - (z_1+z_2)z + z_1 z_2$ y comparando las dos ecuaciones, se obtienen las siguientes igualdades:

$(z_1+z_2) = (a+d)$ y $(z_1.z_2) = (ad-bc)$

Suponiendo que los polos son complejos conjugados, la condición de estabilidad del sistema está dada por.

$|(z_1+z_2)| < 2 \Rightarrow |(a+d)| < 2$ y $|(z_1.z_2)| < 1 \Rightarrow |(ad-bc)| < 1$

De esta forma se fijan las condiciones que deben cumplir los elementos de la matriz A para que el sistema sea estable.

b) Para el que sistema expresado en ecuaciones de estado sea controlable, el rango de su matriz de controlabilidad Qc debe ser igual al rango de la matriz A. Por lo que el rango de el sistema bajo estudio debe ser igual a 2 y su determinante distinto de cero.

$$Q_c = [B.A.B] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 1 & c+d \end{bmatrix}$$

$$det\, Q_c = \begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 1 & c+d \end{vmatrix} = c+d-a-b \neq 0 \Rightarrow (c+d) \neq (a+b)$$

c) Para el que sistema expresado en ecuaciones de estado sea observable, el rango de su matriz de observabilidad Qo debe ser igual al rango de la matriz A. Por lo que el rango de el sistema bajo estudio debe ser igual a 2 y su determinante distinto de cero.

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ C.A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \qquad 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \;,\; det\, Q_o = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b \Rightarrow b \neq 0$$

d) Para obtener la función de transferencia a partir de las ecuaciones de estado se aplica la siguiente relación:

$$G(z)=C(zI-A)^{-1}B+D=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}z & 0\\0 & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z-a & -b\\-c & z-d\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z)=\frac{z+b-d}{z^2-(a+d)z+ad-bc}$$

Se verifica que el denominador de G(z), el conjunto de polos del sistema, coincide con la expresión encontrada en el punto a.

e) Según lo planteado en el punto c, para que este sistema sea no observable b debe ser igual a cero. En consecuencia, la función de transferencia se expresa como:

$$G(z)=\frac{zd}{z^2-(a+d)z+ad-bc}=\frac{z-d}{(z-d)(z-a)}\Rightarrow G(z)=\frac{1}{(z-a)}$$

Se comprueba que si el sistema es no observable se cancela un cero con un polo en la función de transferencia.

Ejercicio N° 12

Dado el sistema definido por:

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}u(k) \quad con \quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

a) Verificar que es controlable.

b) Determinar la secuencia de acciones de control u(0) y u(1) que lleva el sistema al estado x(2) dado por:

$$\begin{bmatrix}x_1(2)\\x_2(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

a) Para el que sistema expresado en ecuaciones de estado sea controlable, el rango de su matriz de controlabilidad Qc debe ser igual al rango de la matriz A y su determinante distinto de cero.

$$Q_c=[B.A.B]=\begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0 & 1\\-0.16 & -1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0.5\\0.5 & -0.66\end{bmatrix}$$

$$det\,Q_c=\begin{vmatrix}1 & 0.5\\0.5 & -0.66\end{vmatrix}=-0.91\neq 0$$ Se verifica que el sistmea es controlable.

b) La secuencia de acciones de control u(0) y u(1) que lleva el sistema al estado x(2) solicitado puede ser encontrado a partir de la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\end{bmatrix}=Q_c^{-1}\left(\begin{bmatrix}x_1(2)\\x_2(2)\end{bmatrix}-A^2\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & 0.5\\0.5 & -0.66\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\-0.16 & -1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$$

Operando con Matlab se obtiene el siguiente resultado: $\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.138\\-3.956\end{bmatrix}$

Ejercicio N° 13

Considere el sistema continuo $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-25 & -6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.u \quad con \quad y=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

a) Verificar que el sistema es controlable y observable.

b) Obtener la versión discreta del sistema contínuo.

c) Muestre que para períodos de muestreo $T=\frac{n\pi}{4}$, $n=1,2,3\ldots$ *el sistema discretizado no es controlable ni observable.*

a) Si el sistema es controlable el determinando de su matriz de controlabilidad Qc debe ser distinto de cero.

$$Q_c=[B\,.\,A\,.\,B]=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-25 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -6\end{bmatrix}\ ,\ \det Q_c=\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & -6\end{vmatrix}=-1\neq 0$$ Sistema controlable.

$$Q_o=\begin{bmatrix}C\\C\,.\,A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ [1\quad 0] & \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\a & b\end{bmatrix}\ ,\ \det Q_o=\begin{vmatrix}3 & 1\\-25 & -3\end{vmatrix}=16\neq 0$$ Sistema observable.

b) Para obtener la versión discretizada del sistema contínuo en el dominio de z, primeramente debe obtenerse la función de transferencia del sistema con la siguiente ecuación $G(s)=C(s.I-A)^{-1}B+D$. Operando con Matlab se obtiene:

$$G(s)=\frac{s+3}{s^2+6s+25}$$ .En formato de zeros y polos: $$G(s)=\frac{s+3}{(s+3+4\mathrm{i})(s+3-4\mathrm{i})}$$

Se debe agregar un retenedor de orden cero a G(s) para encontrar G(z).

$$G(z)=\frac{1-z^{-1}}{s}Z\left\{\frac{s+3}{s^2+6s+25}\right\}\Rightarrow G(z)=(1-z^{-1})Z\left\{\frac{s+3}{s(s^2+6s+25)}\right\}$$

Se modifica la expresión entre corchetes para encontrar la transformada Z, dividiendola en fracciones parciales.

$$\frac{s+3}{s(s^2+6s+25)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{(s^2+6s+25)}=\frac{A(s^2+6s+25)+Bs^2+Cs}{s(s^2+6s+25)}=\frac{(A+B)s^2+(6\mathrm{A}+C)s+25\mathrm{A}}{s(s^2+6s+25)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s+3=(A+B)s^2+(6\mathrm{A}+C)s+25\mathrm{A}$$

De la expresión anterior se deducen las siguientes igualdades:

$$\left\{\begin{matrix}(A+B)=0\\(6\mathrm{A}+C)=1\\25\mathrm{A}=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix}A=\frac{3}{25}\\ B=\frac{-3}{25}\end{matrix}\ C=\frac{7}{25}$$

Volviendo a la expresión de G(z):

$$G(z)=\frac{1-z^{-1}}{s}Z\left\{\frac{3/25}{s}+\frac{(-3/25)s+(7/25)}{s^2+6\mathrm{s}+25}\right\}$$

Resolviendo la expresión anterior para encontrar equivalencias en la tabla de transformada Z:

$$G(z)=\frac{1-z^{-1}}{s}Z\left\{\frac{3}{25}s-\frac{3}{25}\frac{s+3}{(s+3)^2+16}+\frac{4}{25}\frac{4}{(s+3)^2+16}\right\}$$

Operando y aplicando equivalencias por tabla de transformada Z se obtiene la expresión:

$$G(z)=\frac{3}{25}\left\{\frac{z\left[(1-e^{-3}\cos(4\mathrm{T}))+(4/3)e^{-3}\sin(4\mathrm{T})\right]+\left[e^{-6\mathrm{T}}-e^{-3\mathrm{T}}\cos(4\mathrm{T})-(4/3)e^{-3}\sin(4\mathrm{T})\right]}{\left[z^2-2\mathrm{z}\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{T}}\cos(4\mathrm{T})+e^{-6\mathrm{T}}\right]}\right\}$$

Haciendo:

$$G(z)\frac{X(z)}{X(z)}=\frac{Y(z)}{U(z)} \quad \text{donde}$$

$$Y(z)=3\left\{z\left[(1-e^{-3}\cos(4T))+(4/3)e^{-3}\sin(4T)\right]+\left[e^{-6T}-e^{-3T}\cos(4T)-(4/3)e^{-3}\sin(4T)\right]\right\}X(z)$$

$$U(z)=25\left[z^2-2z\,e^{-3T}\cos(4T)+e^{-6T}\right]X(z)$$

Las ecuaciones en diferencia del sistema son:

$$y(k)=3\left\{x(k+1)\left[(1-e^{-3}\cos(4T))+(4/3)e^{-3}\sin(4T)\right]+x(k)\left[e^{-6T}-e^{-3T}\cos(4T)-(4/3)e^{-3}\sin(4T)\right]\right\}$$

$$u(k)=25\left[x(k+2)-2e^{-3T}\cos(4T)x(k+1)+e^{-6T}x(k)\right]$$

Haciendo
$$\begin{matrix} x_1(k)=x(k)\Rightarrow x_1(k+1)=x_2(k) \\ x_2(k)=x(k+1)\Rightarrow x_2(k+1)=x(k+2) \end{matrix} :$$

El sistema discreto en ecuaciones de estado se presenta como:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e^{-6T} & 2e^{-3T}\cos(4T) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1/25 \end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix} 3\left[e^{-6T}-e^{-3T}\cos(4T)-(\frac{4}{3})e^{-3T}\sin(4T)\right] & 3\left[1-e^{-3T}\cos(4T)+(\frac{4}{3})e^{-3T}\sin(4T)\right] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

c) La matriz de controlabilidad para la representación discreta del sistema es la siguiente:

$$Q_c=[B \quad AB]=\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1/25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e^{-6T} & 2e^{-3T}\cos(4T) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/25 \end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{25} \\ \frac{1}{25} & \left[\frac{2}{25}e^{-3T}\cos(4T)\right] \end{bmatrix}$$

Si el determinante de Qc es distinto de cero, el sistema es controlable:

$$\det Q_c=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{25} \\ \frac{1}{25} & \left[\frac{2}{25}e^{-3T}\cos(4T)\right] \end{vmatrix}=\frac{-1}{25}\cdot\frac{1}{25}=\frac{-1}{625}\neq 0$$ El sistema controlable para cualquier valor de T.

La matriz de observabilidad para la representación discreta del sistema es la siguiente:

$$Q_o=\begin{bmatrix} C \\ C.A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\left[e^{-6T}-e^{-3T}\cos(4T)-(\frac{4}{3})e^{-3T}\sin(4T)\right] & 3\left[1-e^{-3T}\cos(4T)+(\frac{4}{3})e^{-3T}\sin(4T)\right] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3\left[e^{-6T}-e^{-3T}\cos(4T)-(\frac{4}{3})e^{-3T}\sin(4T)\right] & 3\left[1-e^{-3T}\cos(4T)+(\frac{4}{3})e^{-3T}\sin(4T)\right] \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e^{-6T} & 2e^{-3T}\cos(4T) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Operando con Matlab se obtiene el determinante de Qo:

$$\det Q_o=9e^{(-12T)}-9e^{(-6T)}e^{(-6T)}\cos^2(4T)-9e^{(-6T)}\cos^2(4T)+18e^{(-9T)}\cos^3(4T)+16e^{(-6T)}\sin^2(4T)-32e^{(-9T)}\sin^2(4T)\cos(4T)+¿$$
$$+9e^{(-6T)}-18e^{(-6T)}e^{(-3T)}\cos(4T)+16e^{(-6T)}e^{(-6T)}\sin^2(4T)$$

La expresión det Qo indica que la observabilidad del sistema con representación discreta depende del valor que tome T. La Fig. 13.1 muestra dicha expresión en función de T. Se observa que la curva se hace cero para $T=\frac{\pi}{4}=0.7854$ y para subsecuentes valores de $T=\frac{n\pi}{4}, n=2,3,4...$. Por lo que se puede determinar que para dichos valores de T el sistema en su representación discreta no es observable.

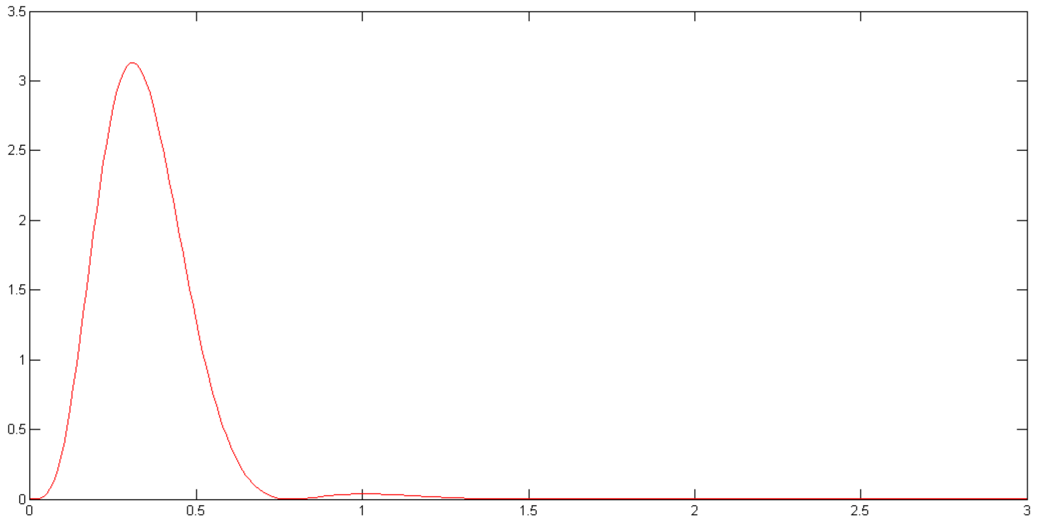


Fig. 13.1

Ejercicio N° 14

Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & \frac{-a}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad \textit{Cuyo estado inicial es} \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine cuando el sistema puede o no alcanzar el estado x(3) = 0 (el origen).
b) Si el estado inicial es el origen, determine cuando el sistema puede alcanzar o no el estado x(3) dado por:

$$x(3) = \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \\ x_3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Un sistema debe ser controlable para poder pasar de un estado determinado a otro estado a consecuencia de un u(k) en la entrada. La matriz de controlabilidad del sistema se define como:

$$Q_c = \left[B\ AB\ A^2B\right], con\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & \frac{-a}{b} \end{bmatrix} y\ B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

Si el sistema es controlable el determinante de la matriz Qc debe ser distinto de cero. Operando con Matlab, el determinante de Qo:

$det\, Q_c = |Q_c| = 0$, por lo que el sistema no es controlable y no puede alcanzar el estado x(3) = 0.

b) Idem punto a).

Ejercicio N° 15

Dado los siguientes sistemas

a) $G_1(z) = \dfrac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$

b) $G_1(z)=\dfrac{b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}$

c) $G_1(z)=\dfrac{b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+b_3 z^{-3}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+a_3 z^{-3}}$

I) Obtener la forma canónica controlable y obtener la matriz de controlabilidad para los tres casos. Verificar la controlabilidad de los sistemas. ¿Que conclusiones obtiene?.
II) Obtener la forma canónica observarble y obtener la matriz de observabilidad para los tres casos. Verificar la observabilidad de los sistemas. ¿Que conclusiones obtiene?
Sugerencia: si el determinante de la matriz es distinto de cero el rango de la matriz es igual al número de filas (o columnas).

a) En primer término se debe pasar el sistema a ecuaciones de estado:

$$G_1(z)=\frac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}}=\frac{b_1}{z+a_1}\frac{X(z)}{X(z)}=\frac{Y(z)}{U(z)}\Rightarrow\begin{Bmatrix} Y(z)=X(z)(b_1) \\ U(z)=X(z)(z+a_1)\end{Bmatrix}$$ Operando y aplicando tablas de anti transformada de Z:

$$\begin{Bmatrix} y(k)=b_1 x(k) \\ u(k)=x(k+1)+a_1 x(k)\end{Bmatrix}$$. Haciendo $$\begin{Bmatrix} x_1(k)=x(k) \\ x_1(k+1)=x(k+1)=u(k)-a_1 x(k)\end{Bmatrix}$$,

el sistema en ecuaciones de estado en la forma canónica controlable se representa como:

$$[x_1(k+1)]=[-a_1][x_1(k)]+[1]u(k)$$
$$y(k)=[b_1][x_1(k)]$$

I) La matriz de controlabilidad del sistema es: $Q_c=[B]=[1]$

El determinante de Qc es: $det\, Q_c=|1|=1$ <=> El sistema es controlable.

II) La matriz de observabilidad canónica del sistema se encuentra a partir de las siguientes igualdades:

$$A_o=A^T, B_o=C^T, C_o=B^T$$

Entonces el sistema en ecuaciones de estado en forma de matrices canónicas observables:

$$[x_1(k+1)]=[-a_1][x_1(k)]+[b_1]u(k)$$
$$y(k)=[1][x_1(k)]$$

La matriz de observabilidad del sistema es: $Q_o=[C_o]=[1]$

El determinante de Qo es: $det\, Q_o=|1|=1$ <=> El sistema es observable.

b) En primer término se debe pasar el sistema a ecuaciones de estado:

$$G_1(z)=\frac{b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}=\frac{b_1 z+b_2}{z^2+a_1 z+a_2}\frac{X(z)}{X(z)}=\frac{Y(z)}{U(z)}\Rightarrow\begin{Bmatrix} Y(z)=X(z)(b_1 z+b_2) \\ U(z)=X(z)(z^2+a_1 z+a_2)\end{Bmatrix}$$

Operando y aplicando tablas de anti transformada de Z:

$$\begin{Bmatrix} y(k)=b_1 x(k+1)+b_2 x(k) \\ u(k)=x(k+2)+a_1 x(k+1)+a_2 x(k)\end{Bmatrix}$$. Haciendo $$\begin{Bmatrix} x_1(k)=x(k) \\ x_2(k)=x_1(k+1)=x(k+1)\end{Bmatrix}$$

el sistema en ecuaciones de estado en la forma canónica controlable se representa como:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix} b_2 & b_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k)\end{bmatrix}$$

I) La matriz de controlabilidad del sistema es: $Q_c=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -a_1\end{bmatrix}$

El determinante de Qc es: $det\,Q_c=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -a_1\end{vmatrix}=-1$ <=> El sistema es controlable.

II) La matriz de observabilidad canónica del sistema se encuentra a partir de las siguientes igualdades:

$$A_o=A^T,\ B_o=C^T,\ C_o=B^T$$

Entonces el sistema en ecuaciones de estado en forma de matrices canónicas observables:

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -a_2\\ 1 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_2\\ b_1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}$$

La matriz de observabilidad del sistema es: $Q_o=\begin{bmatrix}C_o\\ C_oA_o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -a_1\end{bmatrix}$

El determinante de Qo es: $det\,Q_o=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -a_1\end{vmatrix}=-1$ <=> El sistema es observable.

c) En primer término se debe pasar el sistema a ecuaciones de estado:

$$G_1(z)=\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}}=\frac{b_1z^2+b_2z+b_3}{z^3+a_1z^2+a_2z+a_3}\frac{X(z)}{X(z)}=\frac{Y(z)}{U(z)}\Rightarrow\begin{Bmatrix}Y(z)=X(z)(b_1z^2+b_2z+b_3)\\ U(z)=X(z)(z^3+a_1z^2+a_2z+a_3)\end{Bmatrix}$$

Operando y aplicando tablas de anti transformada de Z:

$$\begin{Bmatrix}y(k)=b_1x(k+2)+b_2x(k+1)+b_3x(k)\\ u(k)=x(k+3)+a_1x(k+2)+a_2x(k+1)+a_3x(k)\end{Bmatrix}\ \text{. Haciendo}\ \begin{Bmatrix}x_1(k)=x(k)\\ x_2(k)=x_1(k+1)=x(k+1)\\ x_3(k)=x_2(k+1)=x_1(k+1)\end{Bmatrix},$$

el sistema en ecuaciones de estado en la forma canónica controlable se representa como:

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ x_3(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ x_3(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}b_3 & b_2 & b_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ x_3(k)\end{bmatrix}$$

I) La matriz de controlabilidad del sistema es: $Q_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -a_1\\ 1 & -a_1 & (-a_1^2-a_2)\end{bmatrix}$

El determinante de Qc es: $det\,Q_c=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -a_1\\ 1 & -a_1 & (-a_1^2-a_2)\end{vmatrix}=-1$ <=> El sistema es controlable.

II) La matriz de observabilidad canónica del sistema se encuentra a partir de las siguientes igualdades:

$$A_o=A^T,\ B_o=C^T,\ C_o=B^T$$

Entonces el sistema en ecuaciones de estado en forma de matrices canónicas observables:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

La matriz de observabilidad del sistema es: $Q_o = \begin{bmatrix} C_o \\ C_o A_o \\ C_o A_o^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 1 & -a_1 & (-a_1^2 - a_2) \end{bmatrix}$

El determinante de Qc es: $det\, Q_c = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 1 & -a_1 & (-a_1^2 - a_2) \end{vmatrix} = -1$ <=> El sistema es observable.

- **Conclusión**:

En todos los sistemas analizados la matriz de controlabilidad canónica es igual a la matriz de observabilidad canónica. Por ende como todos los sistemas son controlables y son también observables. Encontes se puede enunciar que si un sistema es controlable analizando su matriz canónica controlable, también será observable.

Ejercicio N° 16

Dado el sistema discreto controlable y observable

x(k + 1) = A x(k) + B u(k)

y (k) = C x(k)

Si se aplica una transformación lineal T no singular al vector de estado

x(k) = T x(k)*

¿se mantiene la controlabilidad y la observabilidad ante la trasformación?

Para verificar si se mantienen controlabilidad y observabilidad del sistema se aplicará la tranformación lineal a las ecuaciones de estado y analizarán las matrices de controlabilidad y observabilidad, respectivamente.

Si $\begin{matrix} x^o(k) = T\,x(k) \Rightarrow x(k) = T^{-1}\,x(k) \\ x^o(k+1) = T\,x(k+1) \Rightarrow x(k+1) = T^{-1}\,x(k+1) \end{matrix}$, remplanzando en las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} & T^{-1} x^o(k+1) = A\,T^{-1} x^o(k) + B\,u(k) \\ & y(k) = C\,T^{-1} x^o(k) \end{aligned}$$

Definiendo $A^o = T\,A\,T^{-1}$ $\quad B^o = T\,B \quad C^o = C\,T^{-1}$, multiplicando miembro a miembro la primera ecuación de estado por T y reemplazando, el nuevo modelo de estado se representa como:

$$\begin{aligned} & x^o(k+1) = A^o x^o(k) + B^o u(k) \\ & y(k) = C^o x^o(k) \end{aligned}$$

La matriz de controlabilidad del nuevo sistema es:

$Q_c^o = \begin{bmatrix} B^o & A^o B^o & (A^o)^2 B^o & (A^o)^3 B^o & \ldots & (A^o)^{n-1} B^o \end{bmatrix}$, donde

$A^o = T\,A\,T^{-1}$, $(A^o)^2 = T\,A\,T^{-1}\,T\,A\,T^{-1} = T\,A^2\,T^{-1}$, $(A^o)^3 = T\,A\,T^{-1}\,T\,A\,T^{-1}\,T\,A\,T^{-1} = T\,A^3\,T^{-1}$, por consiguiente: $(A^o)^n = T\,A^n\,T^{-1}$

Recordando que $B^o = T\,B$, se puede representar a la matriz de controlabilidad como:

$$Q_c^o = \left[T B \quad T A B \quad T A^2 B \quad T A^3 B \quad \ldots \quad T A^{n-1} B \right] = T \left[B \quad A B \quad A^2 B \quad A^3 B \quad \ldots \quad A^{n-1} B \right] \Rightarrow Q_c^o = T Q_c$$

Entonces el determinante de la matriz de controlabilidad:

$$det\, Q_c^o = |T Q_c| = |T| |Q_c|$$

Por ende $det\, Q_c^o \neq 0 \Leftrightarrow |T| \neq 0, |Q_c| \neq 0$. Siendo T no singular por definición, su determinate debe ser distinto de cero. En consecuencia si el sistema original es controlable, también lo será este mismo sistema al aplicarsele una transformación lineal no singular.

La matriz de observabilidad del nuevo sistema es:

$$Q_o^o = \begin{bmatrix} C^o \\ C^o A^o \\ C^o (A^o)^2 \\ C^o (A^o)^3 \\ \ldots \\ C^o (A^o)^{n-1} \end{bmatrix}$$

Recordando que $(A^o)^n = T A^n T^{-1}$ y $C^o = C T^{-1}$: $C^o (A^o)^n = C T^{-1} T (A)^n T^{-1} = C (A)^n T^{-1}$. Entonces:

$$Q_o^o = \begin{bmatrix} C T^{-1} \\ C A T^{-1} \\ C A^2 T^{-1} \\ C A^3 T^{-1} \\ \ldots \\ C A^{n-1} T^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C A \\ C A^2 \\ C A^3 \\ \ldots \\ C A^{n-1} \end{bmatrix} . T^{-1} \Rightarrow Q_o^o = Q_o . T^{-1}$$

Entonces el determinante de la matriz de observabilidad:

$$det\, Q_o^o = |Q_o T^{-1}| = |Q_o| |T^{-1}|$$

Por ende $det\, Q_o^o \neq 0 \Leftrightarrow |Q_c| \neq 0, |T^{-1}| \neq 0$. Siendo T no singular por definición, el determinate de su matriz inversa debe ser distinto de cero. En consecuencia si el sistema original es observable, también lo será este mismo sistema al aplicarsele una transformación lineal no singular.