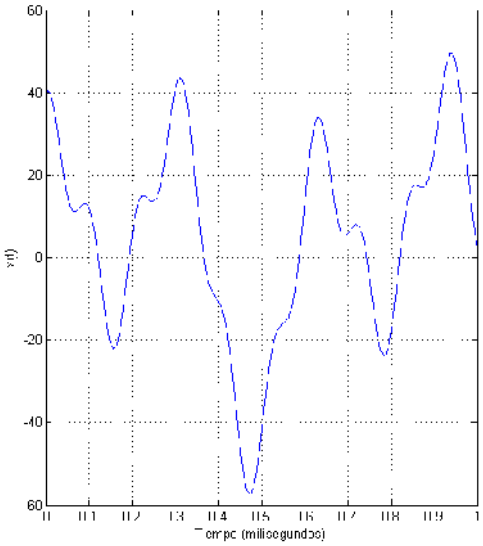
TRABAJO PRÁCTICO No 1 – Sistemas muestreados

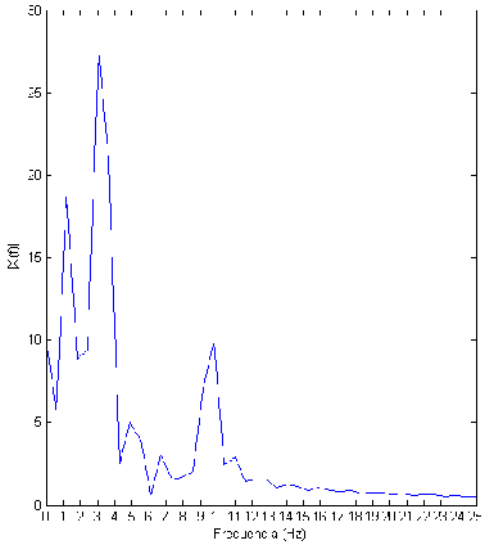
Ej. 1- Dada la señal x(t) = 30cos20t + 18sin3πt + 10cos60t , adoptar una frecuencia útil de muestreo y determinar el intervalo Δt .

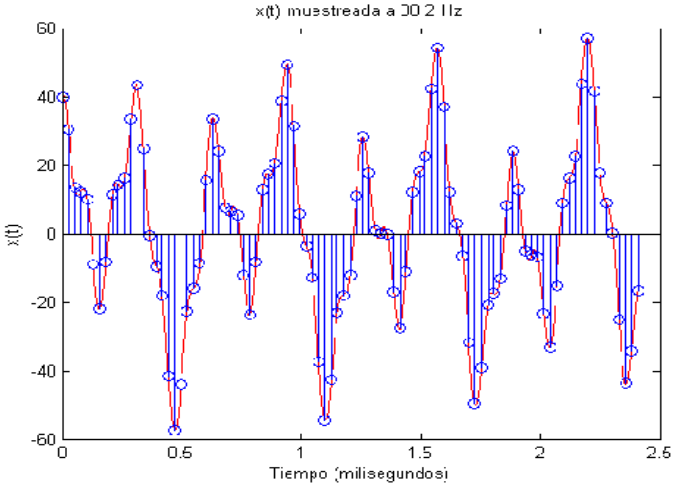
Siendo las 3 frecuencias fundamentales de la señal:

f1 = 20/(2π) = 3,18 Hz.
f2 = (3π)/(2π) = 1,50 Hz.
f3 = 60/(2π) = 9,55 Hz.

Siendo la frecuencia máxima de x(t), fo, igual a 9,55 Hz, la frecuencia de muestreo fs debe ser al menos el doble de ésta según el Teorema del muestreo, aunque en la práctica es recomendable que sea entre 4 y 5 veces mayor que fo. Entonces se fija fs = 4 x 9,55 = 38,2 Hz. Siendo Δts = 1/fs => Δts = 26,18 mseg.

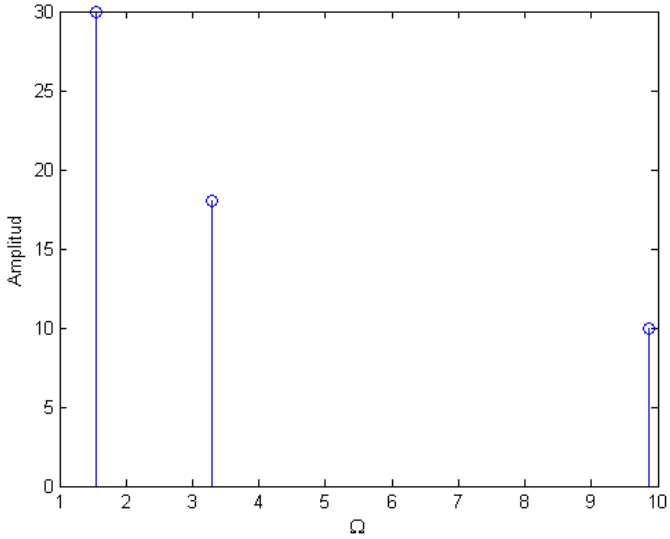






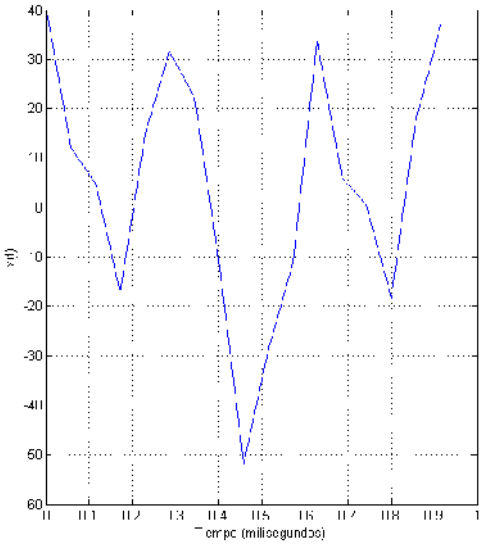
Ej. 2- Representar las componentes del ejemplo anterior en el eje Ω=2π (frecuencia/frecuencia de muestreo) y luego calcular ω4 para Ω = π/2 .

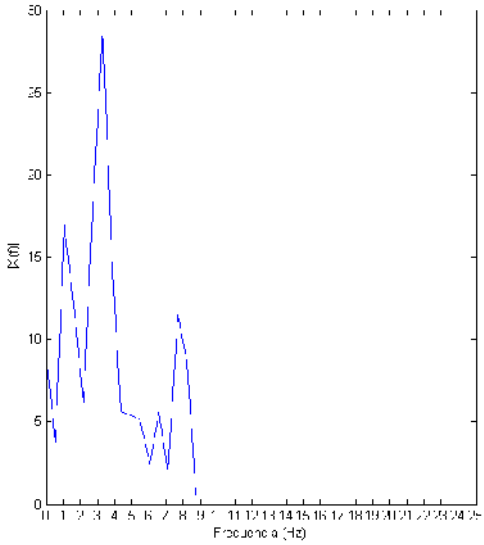
Ω1 = 2π (f1/fs) = 2π (3,18/38,2) = 3,29 .
Ω2 = 2π (f2/fs) = 2π (1,50/38,2) = 1,55.
Ω3 = 2π (f3/fs) = 2π (9,55/38,2) = 9,87.



Siendo Ω =2 π(f/fs) => f = Ω fs / 2 π. Haciendo Ω = π/2 => f4 = π/2 fs /2π = fs / 4 = 38,2 /4 Hz => f4 = 9,55 Hz.

Ej. 3- Para la señal del ejercicio 1, se adopta la frecuencia de muestreo ωs = 110 seg/rad.
a) Comentar qué sucede





Haciendo una comparación entre la primer figura del ejercicio 1 y ésta última se observa un deterioro notable de la señal muestreada respecto a la original. Por el lado del espectro de frecuencias, desaparece la componente de 9,55 y aparece otra alrededor de los 8 Hz. Las componentes de 3,18 Hz y 1,5 Hz siguen estando representes.

b) ¿Cuál es la porción de la señal bien muestreada?

Las componentes de 3,18 Hz y 1,5 Hz aparecen bien muestreadas.

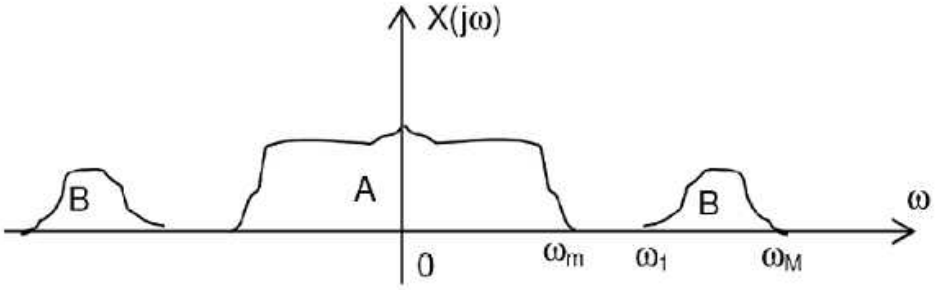
c) ¿Se produce deterioro? ¿Qué frecuencia o frecuencias se pierden?

Sí, se produce deterio. Con esta frecuencia de muestreo no se puede detectar la componente de 9,55 Hz.

d) ¿Cuál es la frecuencia "alias" de la componente mal muestreada?

La frecuencia alias de la componente mal muestreada es la que aparece alrededor de los 8 Hz.

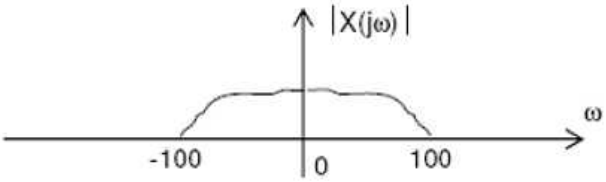
Ej. 4- Sea una señal x(t) tal que X(jω) tiene el espectro (A) y se suma ruido con espectro (B). Suponiendo que: ωm = 200 rad/seg , ω1 =230 rad/seg y ωM = 300 rad/seg. Proponer dos formas de realizar el muestreo sin afectar el espectro (A) de la señal.



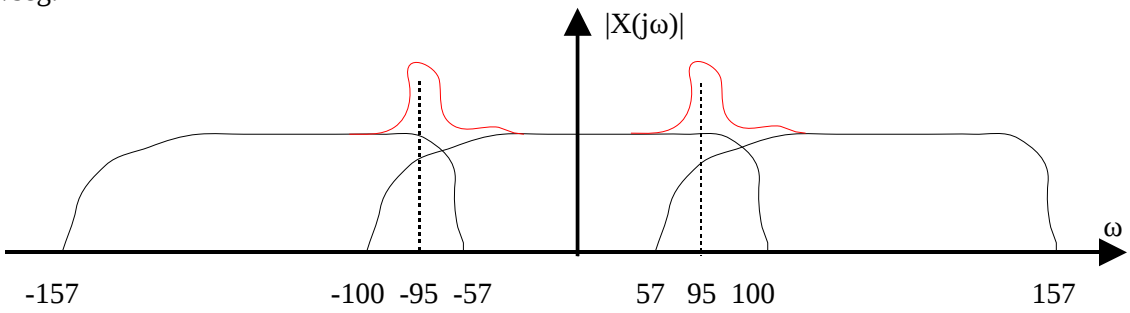
1) Colocar un filtro pasabajos cuya atenuación comience en 200 rad/seg y vaya aumentando hasta los 300 rad/sec.

2) Colocar un filtro suprime-banda para anular el espectro B, entre ω1 =230 rad/seg y ωM = 300 rad/seg.

Ej. 5- Suponer que x(t) tiene por espectro X(jω) el que se muestra en la figura:
Si se adopta una frecuencia de muestreo de fs = 25Hz , ¿qué sucede con la señal entre 57 y 100 rad/seg?. Graficar el espectro resultante. ¿Cómo se ve la componente de 95 rad/seg?



fs = 25 Hz => ωs = 25.2π rad/seg = 157 rad/seg. Con esta frecuencia de muestreo se pueden recuperar las componentes de frecuencia menores a 78,5 rad/seg, por lo que para una señal con ωo = 100 rad/seg habrá pérdida de información. La frecuencia de aliasing se obtiene haciendo ωa = ωs – ωo = 157 – 100 = 57 rad/seg.



La componente de 95 rad/seg aparece con una amplitud mayor a la real, considerando que las componentes que se superponen en la zona de aliasing tienen la misma fase.

Ej. 6- Establecer la frecuencia de muestreo mínima en Hz para las siguientes señales:

a) x(t) = 5sen(300πt +π/3).
b) x(t) = 3 cos(300πt) + 5 sen(500πt).
c) Para la señal x(t) de b), muestrear:
c.1) Cumpliendo estrictamente con el Teorema de Shannon.
c.2) Con una frecuencia de la mitad de la que se obtiene del Teorema de Shannon.
c.3) Con una frecuencia 10 veces mayor a la obtenida por el Teorema de Shannon.
Se pide:

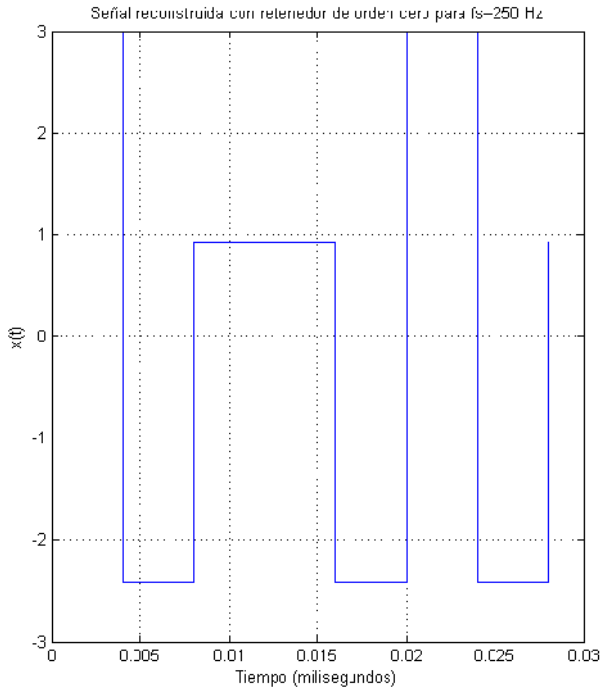
1. *Dibujar los distintos espectros frecuenciales que se obtienen para cada caso. Obtener conclusiones.*
2. *Reconstruir la señal en cada caso utilizando un retenedor de orden cero. Obtener conclusiones.*

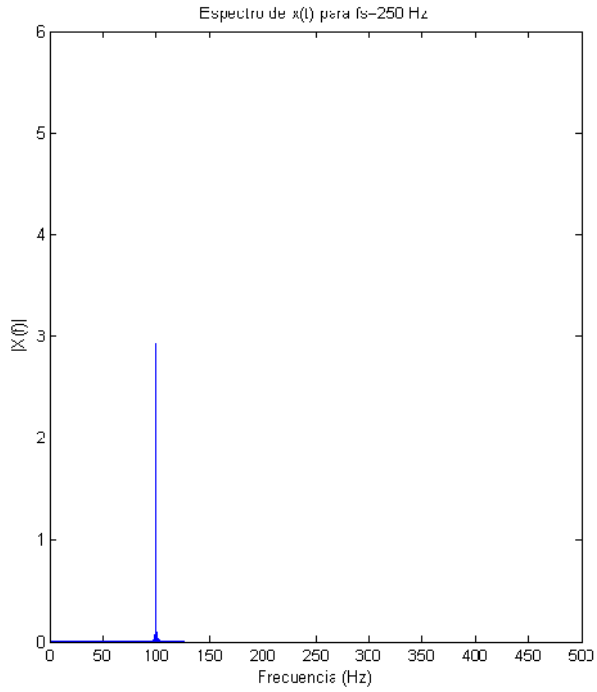
a) x(t) = 5sen(300πt +π/3). Frecuencia de muestreo mínima fs = 300 Hz.

b) x(t) = 3 cos(300πt) + 5 sen(500πt). Frecuencia de muestreo mínima fs = 500 Hz.

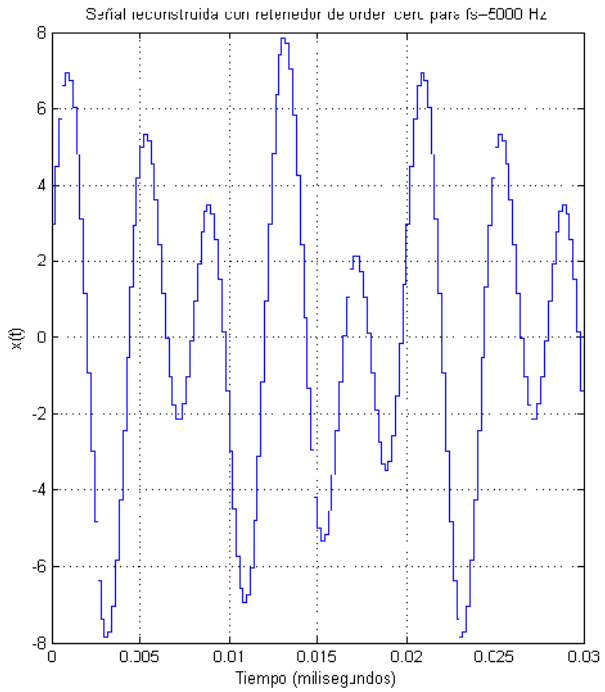
c.1) Cumpliendo estrictamente con el Teorema de Shannon.

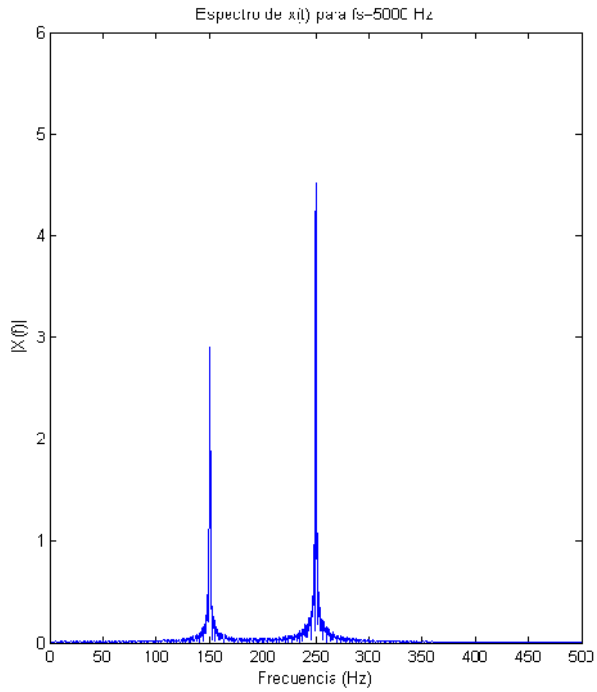
c.2) Con una frecuencia de la mitad de la que se obtiene del Teorema de Shannon.





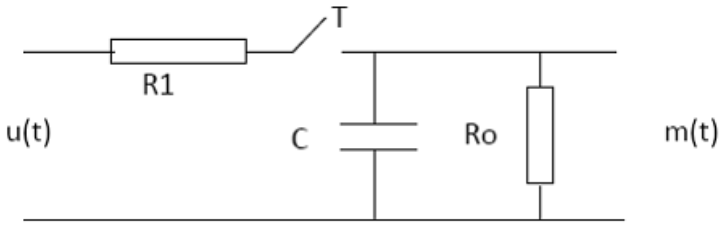
c.3) Con una frecuencia 10 veces mayor a la obtenida por el Teorema de Shannon.





Conclusiones: se ve claramente que para fs menores a 500 Hz, la menor frecuencia de muestreo posible para cumplir con el Teorema de Shannon, se pierde la componente de 250 Hz. Se observa que a medida que aumenta fs se obtiene a la salida del retenedor de orden cero una señal que se asemeja en mayor medida a la señal original.

Ej. 7- Mostrar que el siguiente circuito eléctrico actúa aproximadamente como un retenedor de orden cero (considerando que el muestreador T es sincrónico).



considerar: Ri <<< Ro.

Además:
7.1) Simular el circuito con MATLAB-SIMULINK y obtener gráficas de la señal de entrada, de la señal de entrada muestreada y de la señal de salida del muestreador. Considerar To = 1 mseg y h = 0.1mseg.
7.2) Eliminar el muestreador T, simular nuevamente y obtener conclusiones.
7.3) Considerar que la señal u(t) es continua. Analizar los casos con y sin muestreador T. Obtenga conclusiones.
Nota: Realizar las experiencias de simulación para distintas señales de excitación u(t) (por ejemplo senoidal y escalón).

Una forma de analizar este ejercicio es la de analizar el circuito en dos situaciones: con la llave abierta y con la llave cerrada.

Con la llave cerrada, el circuito se comporta como un filtro pasabajos. Si se especifica que Ri <<< Ro, se considera a Ro prácticamente como un circuito abierto. Entonces la función de transferencia del circuito resultante es la siguiente:

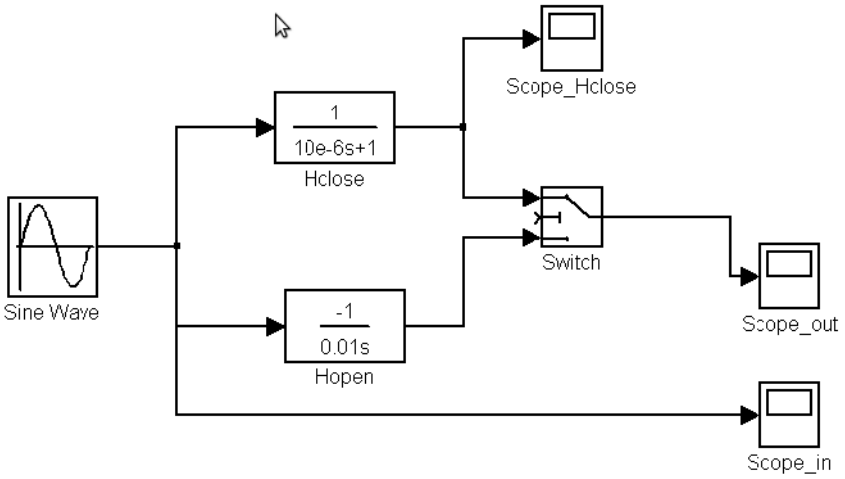
$Hclose = \frac{M(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + RiCs}$ Ecuación que responde a un filtro pasa-bajo con frecuencia de corte:

$$fc = \frac{1}{2\pi RiC}$$

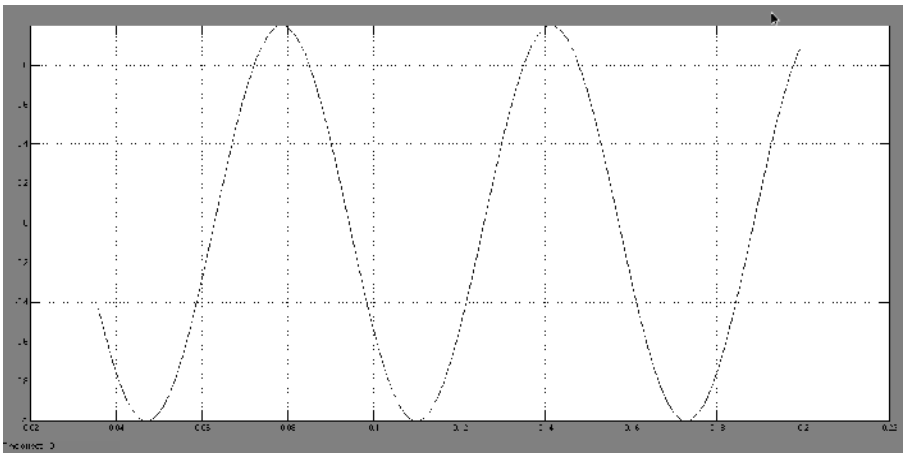
Con la llave abierta el circuito se comporta como un circuito RC paralelo, donde la tensión de entrada, en este caso la tensión en el capacitor C, es igual a tensión de salida, tensión en Ro, desfasada. La ecuación de transferencia del circuito con la llave abierta es:

$$Hopen = \frac{M(s)}{U(s)} = \frac{-1}{RoCs}$$

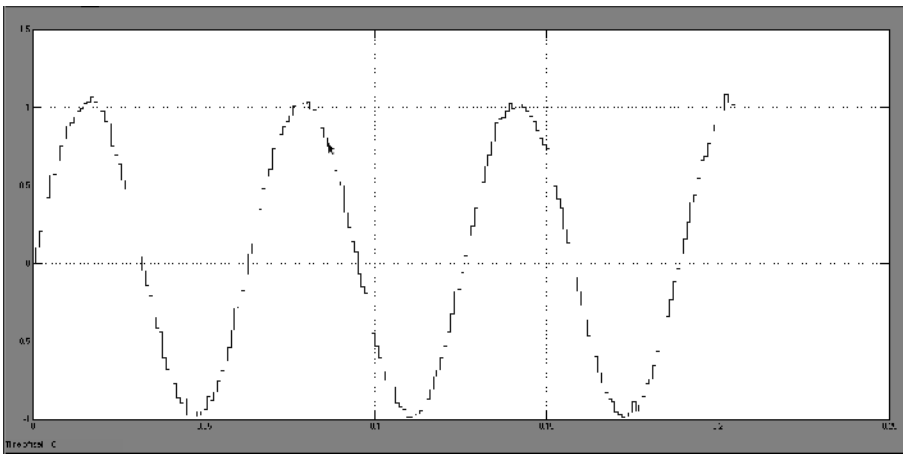
7.1) Se fijan los valores de los componentes del circuito para poder representarlo en Simulink con Ri = 10, Ro= 10.000 y C = 1e-06. El circuito modelado en Simulink es el siguiente:



Se excita al circuito con una onda senoidal. La gráfica de la señal de entrada u(t) (Scope_in) es:

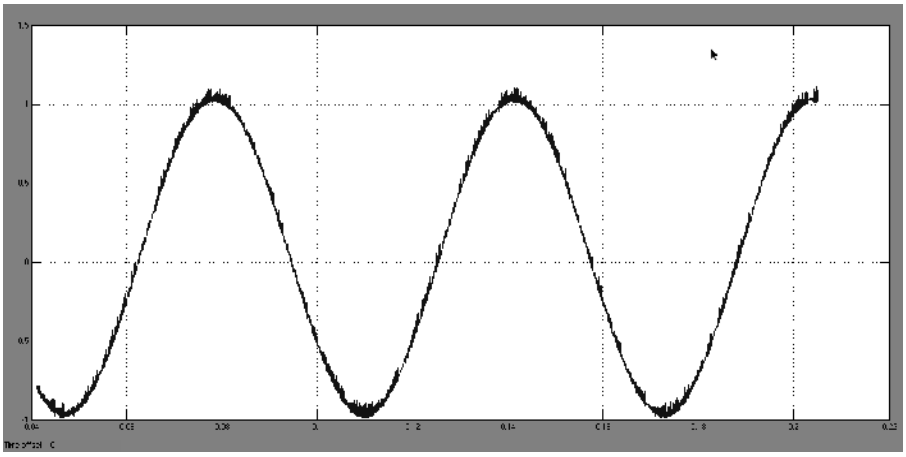


La gráfica de señal de salida muestreada m(t) (Scope_out) es:



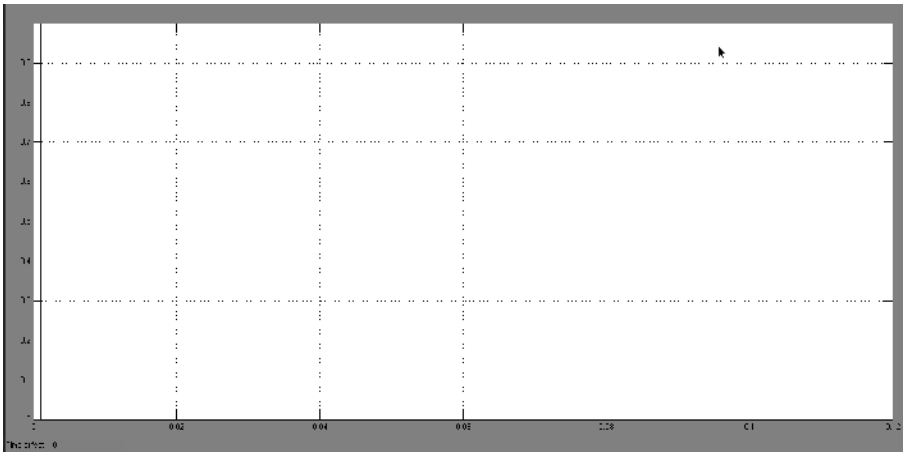
Se obseva un desfasaje de 90 grados entre u(t) y m(t), lo cual era esperable. La gráfica de la señal de entrada muestra las irregularidades típicas de una señal que ha pasado a través de un retenedor de orden cero.

7.2) Se puede observar la señal de salida sin muestrear tomando la misma a la salida del bloque Hclose (Scope_close):

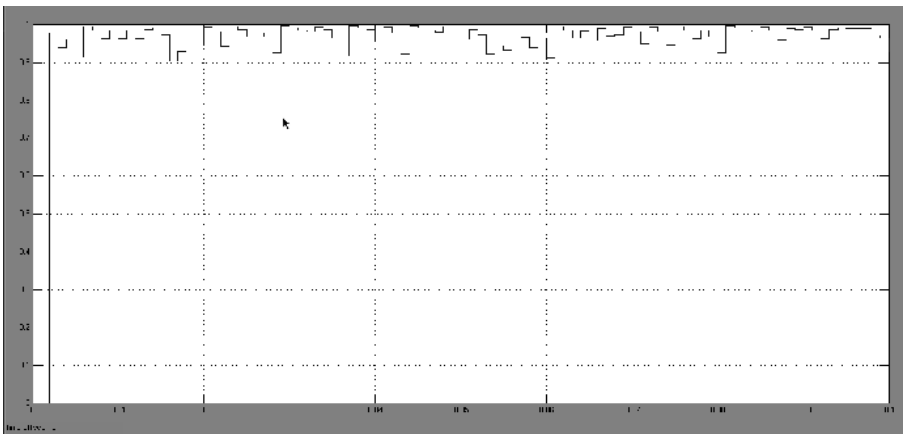


Entre esta señal y la señal de entrada observada en 7.1 no hay desfasaje.

7. Se repiten las mediciones para una señal de entrada del tipo escalón. La gráfica de la señal de entrada u(t):



La correspondiente señal de salida m(t) es la siguiente:



Ej. 8- Encontrar la transformada Z.

a) $f(t)=0\,\forall\, t<0, e^{-at}\,\forall\, t\geq 0$. Usando la tabla de transformaciones: $Z[f(t)]=\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$

b) Para encontrar esta transformada se aplica el Teorema de traslación compleja.

$$Z\left[e^{-at}\,sen(\omega t)\right]=\frac{e^{-aT}z^{-1}sen(\omega t)}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos(\omega T)+e^{-2aT}z^{-2}}$$

c) $f(kT)=kTe^{-2kT}$ Según tabla de transformación Z: $Z[f(kT)]=\dfrac{Te^{-2T}z^{-1}}{\left(1-e^{-2T}z^{-1}\right)^2}$

Ej. 9- Dada la siguiente ecuación en diferencias, encontrar G(z) = y(z) / x(z).

$$y(k)=\frac{1}{2}x(k)+x(k-1)+\frac{1}{2}x(k-2)\Rightarrow y(z)=\frac{1}{2}x(z)+z^{-1}x(z)+\frac{1}{2}z^{-2}x(z)=x(z)\left(\frac{1}{2}+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{y(z)}{x(z)}=\left(\frac{1}{2}+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)=\frac{1}{2}\left(z^{-2}+2z^{-1}+1\right)$$

Ej. 10- Encontrar la Transformada Z de:

a) $F(s)=\dfrac{2(s+3)}{s(s+7)}=\dfrac{2s}{s(s+7)}+\dfrac{6}{s(s+7)}=\dfrac{2}{(s+7)}+\dfrac{6}{s(s+7)}=2\dfrac{1}{(s+7)}+\dfrac{6}{7}\dfrac{7}{s(s+7)}$

Resolviendo por tabla de tranformadas Z de :

$$F(z)=\frac{2}{1-\left(e^{-7T}z^{-1}\right)}+\frac{6}{7}\frac{\left(1-e^{-7T}\right)z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\left(e^{-7T}z^{-1}\right)\right)}$$

b) $X(s)=\dfrac{1}{(s+a)^2}\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}=P(s).R^0(s)$, donde $P(s)=\dfrac{1}{s(s+a)^2}$ y $R^0(s)=1-e^{-Ts}$.

X(s) representa una función de transferencia multiplicada por un retenedor de orden cero. Entonces:

$X(z)=P(z).R^0(z)$ donde $R^0(z)=\frac{z-1}{z}$. La $Z\{P(s)\}$ no se puede obtener por tablas y es necesario aplicar el método de descomposición en fracciones simples.

$P(s)=\frac{1}{s(s+a)^2}=\frac{A}{(s+a)^2}+\frac{B}{(s+a)}+\frac{C}{s}=\frac{As+Bs(s+a)+C(s+a)^2}{s(s+a)^2}$ Igualando numeradores:

$1=As+Bs(s+a)+C(s+a)^2=As+Bs^2+aBs+Cs^2+2aCs+a^2C=s^2(B+C)+s(A+2\mathrm{aC}+aB)+a^2C$

Se obtienen 3 ecuaciones para resolver 3 incógnitas:

$B+C=0$

$A+2aC+aB=0$

$a^2C=1$

Resolviendo y despejando:

$C=\frac{1}{a^2}$

$B+\frac{1}{a^2}=0\Rightarrow B=\frac{-1}{a^2}$

$A+2\mathrm{a}\left(\frac{1}{a^2}\right)-a\left(\frac{1}{a^2}\right)=0\Rightarrow A+\frac{2}{a}-\frac{1}{a}=0\Rightarrow A+\frac{1}{a}=0\Rightarrow A=\frac{-1}{a}$

Entonces

$P(s)=\frac{-1}{a}\frac{1}{(s+a)^2}-\frac{1}{a^2}\frac{1}{(s+a)}+\frac{1}{a^2}\frac{1}{s}$

Resolviendo por tablas de trasformada Z y aplicando la propiedad de la transformada Z de la multiplicación por una constante :

$P(z)=\frac{-1}{a}\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}-\frac{1}{a^2}\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{1}{1-z^{-1}}$

$$X(z)=P(z)R^0(z)=\left[\frac{-1}{a}\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}-\frac{1}{a^2}\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{1}{1-z^{-1}}\right]\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

Ej. 11- Encontrar las transformada Z inversa de:

a) $X(z)=\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$ Se resuelve usando las tablas de antitransformada Z: $x(k)=\frac{k(k-1)}{2!}$

b)Determinar la secuencia {fk}, sabiendo que su transformada en z es:

$F(z)=\frac{z^2e^{-a}}{z^2-(1+e^{-a})z+e^{-a}}$ Dividiendo numerador y demoninador por z^2

$$F(z)=\frac{1e^{-a}}{1-(1+e^{-a})z^{-1}+z^{-2}e^{-a}}\Rightarrow 1e^{-a}=F(z)\left[1-(1+e^{-a})z^{-1}+z^{-2}e^{-a}\right]$$

$e^{-a}=F(z)-F(z)(1+e^{-a})z^{-1}+F(z)z^{-2}e^{-a}$ Aplicando el Teorema del corrimiento:

$$e^{-a}=f(k)-f(k-١)(١+e^{-a})+f(k-٢)e^{-a}\Rightarrow f(k)=-f(k-٢)e^{-a}+f(k-١)(١+e^{-a})+e^{-a}$$

Ej. 12- Dada G(z), encontrar la secuencia de salida y(k) cuando u(k) es una secuencia escalón unitario. Suponer que y(0)=y(1)=0.

$G(z)=\frac{y(z)}{x(z)}=\frac{z+1}{z^2-1.4z+0.48}$ Dividiendo numerador y demoninador por z^2

$$\frac{y(z)}{x(z)}=\frac{z^{-1}+z^{-2}}{1-1.4z^{-1}+0.48z^{-2}}\Rightarrow x(z)(z^{-1}+z^{-2})=y(z)(1-1.4z^{-1}+0.48z^{-2})$$

$x(z)z^{-1}+x(z)z^{-2}=y(z)-1.4y(z)z^{-1}+0.48y(z)z^{-2}$ Aplicando miembro a miembro el Teorema del corrimiento:

$$x(k-1)+x(k-2)=y(k)-1.4y(k-1)+0.48y(k-2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(k)=1.4y(k-1)-0.48y(k-2)+x(k-1)+x(k-2)$$

La secuencia de los primeros 60 periodos de muestreo se muestra en la siguiente tabla:

k	y(k)	k	y(k)
0	0,000	30	24,944
1	1,000	31	24,955
2	3,400	32	24,964
3	6,280	33	24,971
4	9,160	34	24,977
5	11,810	35	24,982
6	14,137	36	24,985
7	16,123	37	24,988
8	17,786	38	24,991
9	19,162	39	24,993
10	20,289	40	24,994
11	21,207	41	24,995
12	21,951	42	24,996
13	22,552	43	24,997
14	23,037	44	24,998
15	23,426	45	24,998
16	23,739	46	24,998
17	23,990	47	24,999
18	24,191	48	24,999
19	24,353	49	24,999
20	24,482	50	24,999
21	24,585	51	24,999
22	24,668	52	25,000
23	24,735	53	25,000
24	24,788	54	25,000
25	24,830	55	25,000
26	24,864	56	25,000
27	24,891	57	25,000
28	24,913	58	25,000
29	24,930	59	25,000