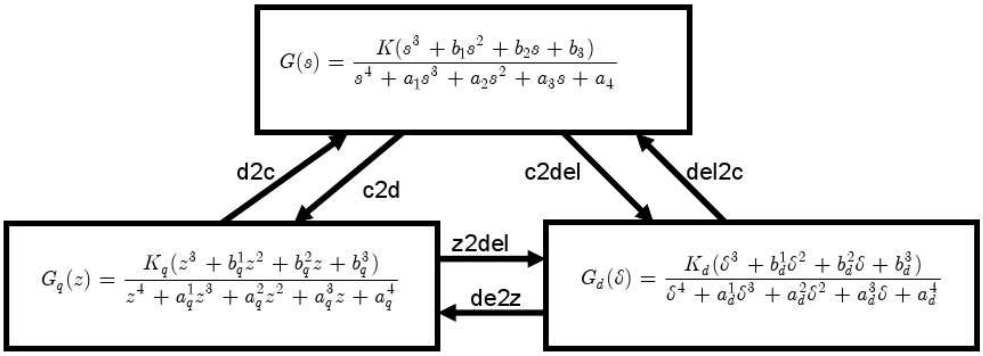
Práctica: Generalidades de sistemas discretos

Alumno: Rodrigo González.

Ejercicio No1. Sea el siguiente esquema de conversión entre modelos continuos y discretos



Analizar el siguiente hecho: "Al discretizar cualquier planta continua de orden *n* el número de ceros del modelo discreto es *n-1*". Clasificar los tipos de ceros de los modelos discretos.

Siendo *p* la cantidad de polos y *m* la cantidad de ceros en la función de transferencia en el dominio continuo, los ceros de los modelos discretos se pueden clasificar según el tipo de tranformada discreta.

Trasformada z

1) *m* ceros discretos tienden a los valores de los ceros en el dominio continuo a medida que disminuye el tiempo de muestreo.

2) *n-m-1* ceros discretos: tienden a los valores de las raíces del polinomio de Euler-Frobenius a medida que disminuye el tiempo de muestreo.

Trasformada delta

1) *m* ceros discretos tienden a la ubicación de los *m* ceros del sistema en el dominio continuo a medida que disminuye el tiempo de muestreo.

2) *n-m-1* ceros discretos se dirigen hacia menos infinito a medida que disminuye el tiempo de muestreo.

Ejercicio No2. Dada la planta continua $G(s)=\frac{1}{(s+1)^4}$

a) Verificar el teorema de Ästrom, esto es, para ts → 0 los polos de *G(z)* se dirigen a z = 1 y los ceros de muestreo se dirigen a los ceros del polinomio correspondiente de Euler-Frobenius.

$$G(z)=\frac{K(z^3+11z^2+11z+1)}{(z-1)^4}=\frac{K(z+9.899)(z+1)(z+0.101)}{(z-1)^4}$$

Para demostrar la validez del teorema de Ästrom se analizará la planta propuesta en el dominio digital con diferentes tiempos de muestreo ts.

El polinomio de Euler-Frobenius para un sistema de cuarto orden es $B_{n-m}(z)=B_4(z)=z_3+11z_2+11z+1$, cuyas raíces son -9.8990, -1.0000 y -0.1010. A estos tres valores se dirigiran cada uno de los tres (*n-m*) ceros de la planta digitalizada a medida que disminuya el tiempo de muestreo ts.

Para ts = 1 seg., la planta en el dominio de Z se representa con la siguiente ecuación:

$$G(z)=\frac{0.018988(z+4.561)(z+0.4479)(z+0.04434)}{(z-0.3679)^4} \qquad ts=1\,seg.$$

Para ts = 0.1 seg., la planta en el dominio de Z se representa con la siguiente ecuación:

$$G(z)=\frac{3.8468\text{e-}006(z+9.14)(z+0.9231)(z+0.09323)}{(z-0.9048)^4} \qquad ts=0.1\,seg.$$

Para ts = 1 us, la planta en el dominio de Z se representa con la siguiente ecuación:

$$G(z)=\frac{4.16\text{e-}26(z+9.899)(z+1)(z+0.101)}{(z-1)^4} \qquad ts=1\text{e-}6\,seg.$$

Se observa en las ecuaciones de transferencia de las plantas que los polos en el dominio de z (discreto) tienden a la ubicación (1,0i) y que los ceros tienden a los *n-m-1* valores que predice el teorema de Euler-Frobenius.

b) Verificar que el resultado anterior se verifica para cualquier planta continua de cuarto orden.

Para verificar lo expuesto se tomará una planta cualquiera con función de transferencia de cuarto orden tal que

$$G(s)=\frac{3(s+1)(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+4)(s+5)}$$

Como se hizo en el inciso a, se tomarán diferentes tiempos de muestreo ts que irán tendiendo a cero.

Para ts = 1 seg, la planta en el dominio de z se representa con la siguiente ecuación:

$$G(z)=\frac{0.00025(z-253.4)(z-0.3679)(z+0.02183)}{(z-0.3679)(z-0.1353)(z-0.01832)(z-0.006738)} \qquad ts=1\,seg.$$

Para ts = 0.1 seg, la planta en el dominio de z se representa con la siguiente ecuación:

$$G(z)=\frac{0.01(z+0.6707)(z-0.9048)(z-1.105)}{(z-0.9048)(z-0.8187)(z-0.6703)(z-0.6065)} \qquad ts=0.1\,seg.$$

Para ts = 0.01 seg, la planta en el dominio de z se representa con la siguiente ecuación:

$$G(z)=\frac{0.0001(z+0.9608)(z-0.99)(z-1.01)}{(z-0.99)(z-0.9802)(z-0.9608)(z-0.9512)} \qquad ts=0.01\,seg.$$

Se verifica también para este caso que a medida que ts tiende a cero, los cuatro polos de *G(z)* tienden a la ubicación de los cuatro (*n*) polos de *G(s),* (1, 0i). Dos ceros de *G(z)* tienden a las ubicaciones de los dos (*m*) ceros de *G(s)*, (1, 0i) y (-1, 0i) respectivamente, y un cero (*n-m-1*) tiende a (1,0i), raiz del polinomio de Euler-Frobenius, $B_2(z)=z+1$.

c) Verificar que para ts → 0 los polos de Gd(δ) se dirigen hacia los polos de G(s).

Tomando la siguiente función de transferencia a modo de ejemplo

$$G(s)=\frac{3(s+1)(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+4)(s+5)}$$

se demostrará el enunciado tomando diferentes tiempos de muestreo ts.

Para ts = 0.1 seg. se obtiene la siguiente función de transferencia en el dominio de delta:

$$G_d(\delta)=\frac{0.00024(s+1.022)(s+0.632)(s-252.4)}{(s+0.632)(s+0.864)(s+0.981)(s+0.993)} \qquad ts=1\,seg.$$

Para ts = 0.1 seg. se obtiene la siguiente función de transferencia en el dominio de delta:

$$G_d(\delta)=\frac{0.1003(s+0.951)(s-1.05)(s+16.71)}{(s+0.951)(s+1.813)(s+3.297)(s+3.935)} \qquad ts=0.1\,seg.$$

Para ts = 0.01 seg. se obtiene la siguiente función de transferencia en el dominio de delta:

$$G_d(\delta)=\frac{0.0144(s+0.995)(s-1.005)(s+196.1)}{(s+0.995)(s+1.98)(s+3.921)(s+4.877)} \qquad ts=0.01\,seg.$$

Para ts = 0.001 seg. se obtiene la siguiente función de transferencia en el dominio de delta:

$$G_d(\delta)=\frac{0.00149(s+1)(s-1.001)(s+1996)}{(s+1)(s+1.998)(s+3.992)(s+4.988)} \qquad ts=0.001\,seg.$$

Analizando los cuatros ejemplos propuestos, se comprueba que los polos en el dominio de delta (discreto) tienden a la ubicación de los polos del sistema en el dominio de s (continuo) a medida que el tiempo de muestreo tiende a cero.

d) Para ts → 0 , ¿hacia adonde van los ceros de Gd (δ) ?

Analizando los cuatros casos propuestos y generalizando, *m* ceros en el dominio de delta (discreto) tienden a la ubicación de los *m* ceros del sistema en el dominio de s (continuo) y *n-m-1* ceros se dirigen hacia menos infinito.

e) Generalizar c y d.

Para generalizar los incisos c y d anteriores se tomará una ecuación de transferencia de quinto orden arbitraria, la cual es

$$G(s)=\frac{10(s+1)}{(s+2)(s+4)(s+5)(s^2+2s+2)}$$

Para ts = 0.1 seg. se obtiene la siguiente función de transferencia en el dominio de delta:

$$G_d(\delta)=\frac{0.0475(\delta+2.344)(\delta+1.099)(\delta+1.006)(\delta+0.6315)}{(\delta+0.8647)(\delta+0.9817)(\delta+0.9933)(\delta^2+1.602\,\delta+0.7378)} \qquad ts=1\,seg.$$

Para ts = 0.1 seg. se obtiene la siguiente función de transferencia en el dominio de delta:

$$G_d(\delta)=\frac{0.00032(\delta+88.23)(\delta+17.87)(\delta+10.79)(\delta+0.9516)}{(\delta+3.935)(\delta+3.297)(\delta+1.813)(\delta^2+1.994\,\delta+1.81)} \qquad ts=0.1\,seg.$$

Para ts = 0.01 seg. se obtiene la siguiente función de transferencia en el dominio de delta:

$$G_d(\delta)=\frac{4.068\text{e-}7(\delta+1066)(\delta+197.6)(\delta+109.9)(\delta+0.995)}{(\delta+4.877)(\delta+3.921)(\delta+1.98)(\delta^2+2\,\delta+1.98)} \qquad ts=0.01\,seg.$$

Para ts = 0.001 seg. se obtiene la siguiente función de transferencia en el dominio de delta:

$$G_d(\delta)=\frac{4.15\text{e-}10(\delta+1.088\text{e}4)(\delta+1998)(\delta+1101)(\delta+1)}{(\delta+4.98)(\delta+3.99)(\delta+1.99)(\delta^2+2\,\delta+1.99)} \qquad ts=0.001\,seg.$$

Analizando los cuatro casos propuestos anteriormente se puede concluir que todo lo dicho en los incisos c y d vale para estos ejemplos propuestos. Esto es, los *n* polos de la transformada delta tienden a los *n* polos de la función de transferencia en el dominio continuo a medida que el tiempo de muestreo tiende a cero.

f) Obtener los tres modelos en variables de estados.

La función de transferencia *G(s)* del inciso *a* en variables de estado:

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)^4}=\frac{1}{s^4+4\,s^3+6\,s^2+4\,s+1} \qquad \begin{cases} \rho\,x(t)=A\,x(t)+B\,u(t) \\ y(t)=C\,x(t)+Du(t) \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}-4 & -6 & -4 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad D=0$$

La función de transferencia en el dominio discreto z en variables de estado, para ts =1 seg.:

$$G(z)=\frac{0.01899\,z^3+0.09595\,z^2+0.04301\,z+0.00172}{z^4-1.472\,z^3+0.812\,z^2-0.1991\,z+0.01832} \qquad \begin{cases} qx(k)=A_q x(k)+B_q u(k)\\ y(k)=C_q x(k)+D_q u(k)\end{cases}$$

$$A_q=\begin{bmatrix}-0{,}2452 & -0{,}91969 & -0{,}36787 & -0{,}0613\\ 0{,}0613 & 6{,}76\text{e-}17 & -0{,}5518 & -0{,}1226\\ 0{,}1226 & 0{,}5518 & 0{,}7357 & -0{,}0613\\ 0{,}0613 & 0{,}3678 & 0{,}9196 & 0{,}9810\end{bmatrix} \qquad B_q=\begin{bmatrix}0{,}0613\\0{,}1226\\0{,}0613\\0{,}0189\end{bmatrix} \qquad C_q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad D_q=0$$

La función de transferencia en el dominio discreto delta en variables de estado, para ts =1 seg.:

$$G_d(\delta)=\frac{0.01899\,\delta^3+0.1529\,\delta^2+0.2919\,\delta+0.1597}{\delta^4+2.528\,\delta^3+2.397\,\delta^2+1.01\,\delta+0.1597} \qquad \begin{cases} \delta x(k)=A_d x(k)+B_d u(k)\\ y(k)=C_d x(k)+D_d u(k)\end{cases}$$

$$A_d=\begin{bmatrix}-1{,}2452 & -0{,}9196 & -0{,}3678 & -0{,}0613\\ 0{,}0613 & -1 & -0{,}5518 & -0{,}1226\\ 0{,}1226 & 0{,}5518 & -0{,}2642 & -0{,}0613\\ 0{,}0613 & 0{,}3678 & 0{,}9196 & -0{,}0189\end{bmatrix} \qquad B_d=\begin{bmatrix}0{,}0613\\0{,}1226\\0{,}0613\\0{,}0189\end{bmatrix} \qquad C_d=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad D_d=0$$

g) Obtener los modelos en simulink de *Gd(δ)* y el modelo de estados en transformada delta.

Para realizar los modelos solicitados se utilizará la siguiente función de transferencia:

$$G(s)=\frac{100(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+4)(s+5)}$$

El modelo de $G_d(\delta)$ en simulink se basa en la siguiente ecuación:

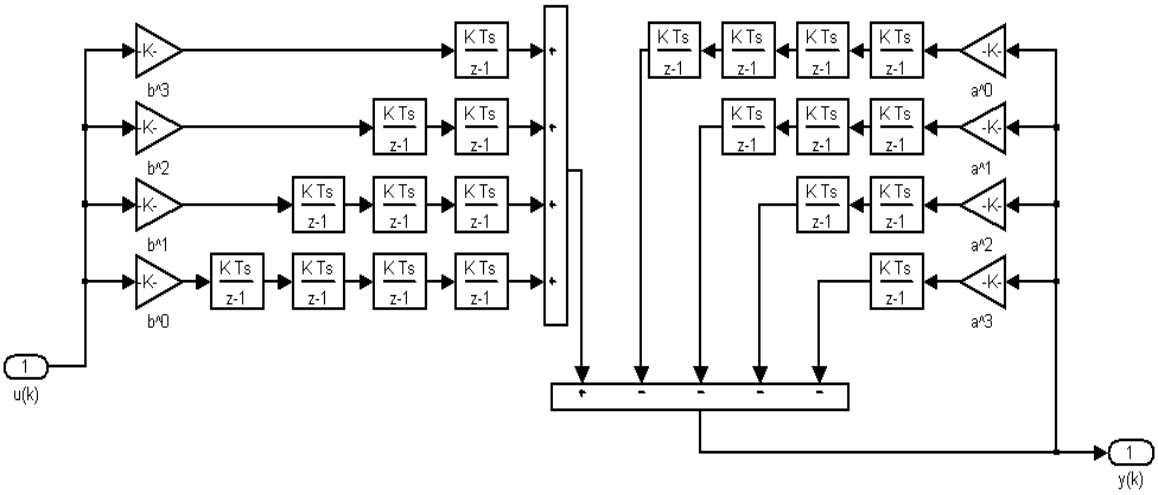
$$G_d(\delta)=\frac{b_3\delta^3+b_2\delta^2+b_1\delta+b_0}{\delta^4+a_3\delta^3+a_2\delta^2+a_1\delta+a_0}=\frac{y(k)}{u(k)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(k)b_3\delta^3+u(k)b_2\delta^2+u(k)b_1\delta+u(k)b_0=y(k)\delta^4+y(k)a_3\delta^3+y(k)a_2\delta^2+y(k)a_1\delta+y(k)a_0\Rightarrow$$

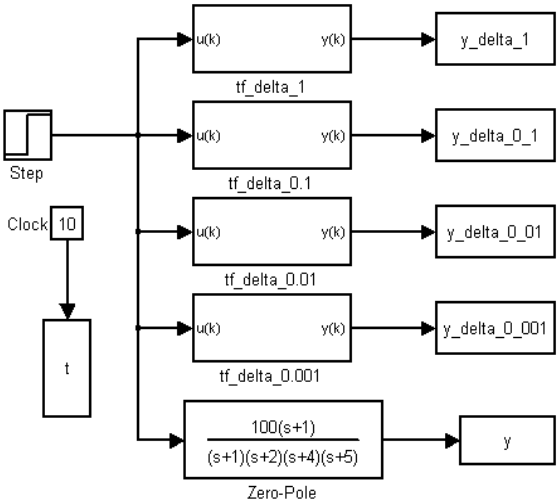
$$\Rightarrow y(k)\delta^4=u(k)b_3\delta^3+u(k)b_2\delta^2+u(k)b_1\delta+u(k)b_0-y(k)a_3\delta^3-y(k)a_2\delta^2-y(k)a_1\delta-a_0y(k)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(k)=u(k)b_3\delta^{-1}+u(k)b_2\delta^{-2}+u(k)b_1\delta^{-3}+u(k)b_0\delta^{-4}-y(k)a_3\delta^{-1}-y(k)a_2\delta^{-2}-y(k)a_1\delta^{-3}-y(k)a_0\delta^{-4}$$

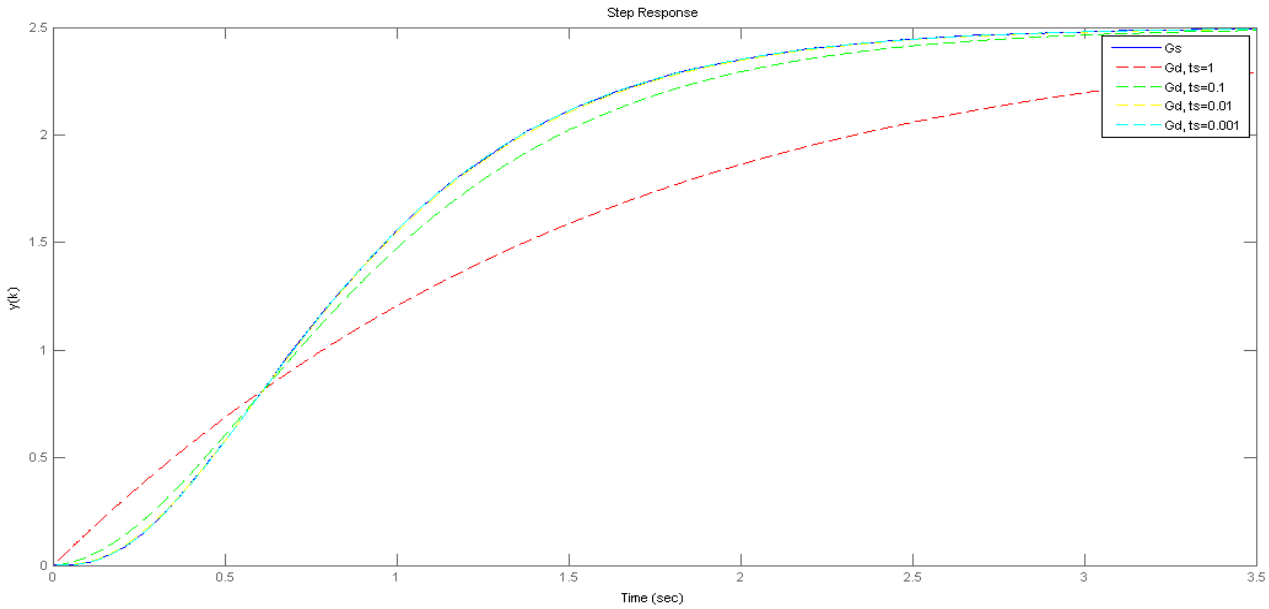
Entonces, el modelo de $G_d(\delta)$ en simulink:



Se realizaron cuatro modelos del sistema en el dominio discreto (δ) para cuatro tiempos de muestreo *ts*: 1 segundo, 0.1 segundos, 0.01 segundos y 0.001 segundos. Dichos modelos se compararon con el modelo del sistema en el dominio continuo (s). El modelo resultante es el siguiente:

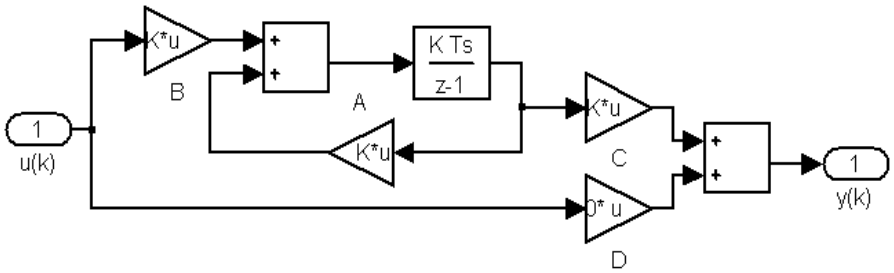


La gráfica de las señales de salidas de los cinco modelos:

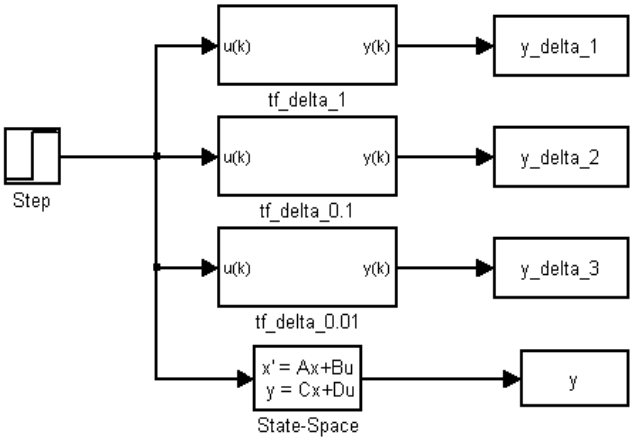


De observa que a partir de un ts = 0.01, los modelos discretos y continuo prácticamente coinciden.

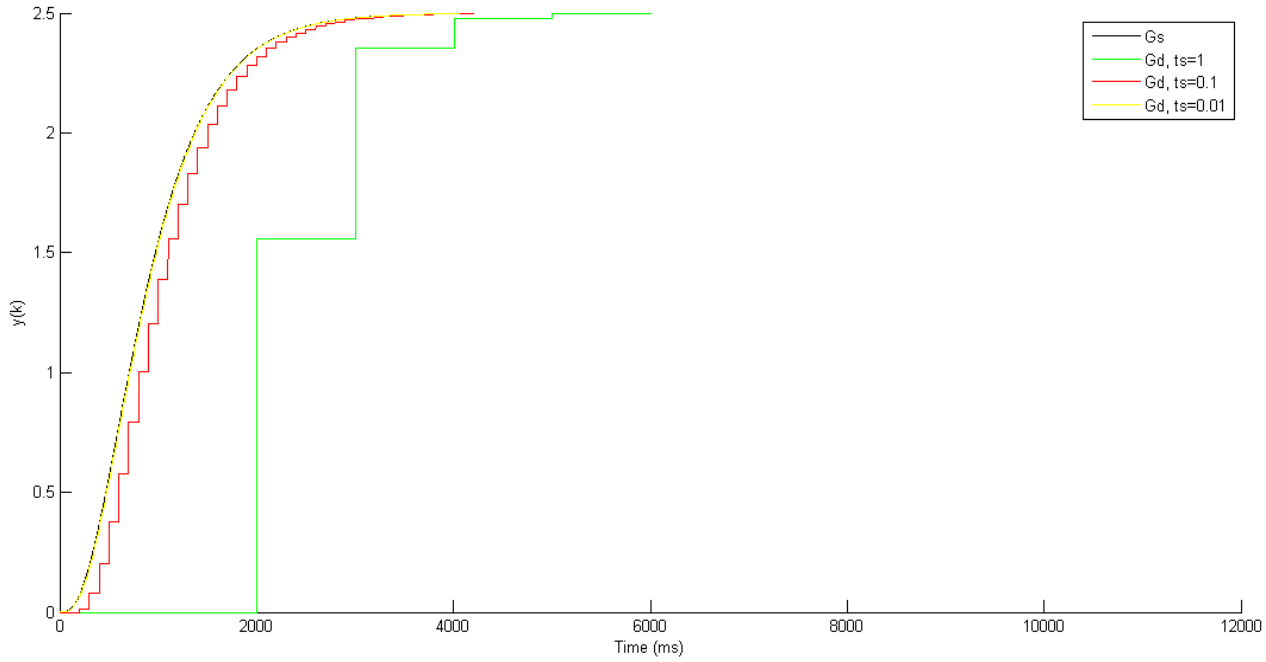
El modelo de estados en transformada delta.



Para el caso de los sistemas modelados en ecuaciones de estado se realizaron tres modelos del sistema en el dominio discreto (δ) para ts =1 segundo, ts = 0.1 segundos y ts =0.01 segundos. Dichos modelos se compararon con el modelo del sistema en el dominio continuo. El modelo de prueba resultante es el siguiente:



La gráfica de las señales de salidas de los cinco modelos:



h) Obtener el modelo de estados en realización balanceada (utilizar el comando delbalre del delta toolbox).

Utilizando la función de transferencia del inciso a

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)^4}=\frac{1}{s^4+4s^3+6s^2+4s+1} \qquad \begin{cases} \rho\, x(t)=A\,x(t)+B\,u(t) \\ y(t)=C\,x(t)+Du(t) \end{cases}$$

Su representación en modelo de estados

$$A=\begin{bmatrix} -4 & -6 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D=0$$

El modelo de variables de estado sin balancear en el dominio discreto delta para ts =0.01 seg:

$$\begin{cases} \delta\, x(k)=A_d\,x(k)+B_d\,u(k) \\ y(k)=C_d\,x(k)+D_d\,u(k) \end{cases}$$

$$A_d=\begin{bmatrix} -3.95 & -5.9 & -3.925 & -0.98 \\ 0.98 & -0.0296 & -0.019 & -0.004 \\ 0.004 & 0.999 & -6.602\text{e-}5 & -1.65\text{e-}5 \\ 1.65\text{e-}5 & 0.004 & 0.999 & -4.13\text{e-}8 \end{bmatrix} \qquad B_d=\begin{bmatrix} 0.98 \\ 0.004 \\ 1.65\text{e-}5 \\ 4.13\text{e-}8 \end{bmatrix} \qquad C_d=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_d=0$$

El modelo de variables de estado balanceado en el dominio discreto delta para ts =0.01 seg.:

$$A_d=\begin{bmatrix} -0.535 & -1.577 & 0.526 & 1.77\text{e-}8 \\ 1.577 & -2.81 & 2.821 & 8.39\text{e-}8 \\ 0.526 & -2.821 & -7.432 & -5.05\text{e-}7 \\ 2.36\text{e-}10 & -1.12\text{e-}9 & -6.745\text{e-}9 & -0.995 \end{bmatrix} \quad B_d=\begin{bmatrix} -1.309 \\ 1.469 \\ 0.671 \\ 2.94\text{e-}10 \end{bmatrix}$$

$$C_d=\begin{bmatrix} -1{,}303 & -1{,}49 & 0{,}723 & 2{,}48\text{e-}8 \end{bmatrix} \quad D_d=0$$

Ejercicio No3 - Repetir el ejercicio anterior para $G(s)=\dfrac{b_0 s^4+b_1 s^3+b_2 s^2+b_3 s+b_4}{s^5+a_1 s^4+a_2 s^3+a_3 s^2+a_4 s+a_5}$ con $num=[b_0 b_1 b_2 b_3 b_4]=[0,0,0,5,5]$ y $dem=[a_1 a_2 a_3 a_4 a_5]=[1,6,18,30,25,10]$

a) Verificar el teorema de Ästrom, esto es, para ts → 0 los polos de *G(z)* se dirigen a z = 1 y los ceros de muestreo se dirigen a los ceros del polinomio correspondiente de Euler-Frobenius.

Siendo $G(s)=\dfrac{5s+5}{s^5+6s^4+18s^3+30s^2+25s+10}$

O en formato zpk:

$$G(s)=\frac{5(s+1)}{(s+2)(s+0.699-0.655\text{i})(s+0.699+0.655\text{i})(s+1.301-1.937\text{i})(s+1.301+1.937\text{i})}$$

Para demostrar la validez del teorema de Ästrom se analizará la planta propuesta en el dominio digital con diferentes tiempos de muestreo ts.

Siendo n=5 y m=1, el polinomio de Euler-Frobenius para la función de transferecia propuesta es $B_{n-m}(z)=B_4(z)=z_3+11z_2+11z+1$, cuyas raíces son -9.8990, -1.0000 y -0.1010. A estos tres valores se dirigen cada uno de los tres ceros de la planta digitalizada a medida que disminuye el tiempo de muestreo ts.

Para ts = 1 seg., la planta en el dominio de Z se representa con la siguiente ecuación:

$$G(z)=\frac{0.07(z+3.028)(z+0.348)(z-0.367)(z+0.046)}{(z-0.133)(z-0.993-0.007\text{i})(z-0.993+0.007\text{i})(z-0.394-0.303\text{i})(z-0.394+0.303\text{i})} \qquad ts=1\,seg.$$

Para ts = 0.1 seg., la planta en el dominio de Z se representa con la siguiente ecuación:

$$G(z)=\frac{1.88\text{e-}5(z+8.941)(z+0.904)(z-0.904)(z+0.0915)}{(z-0.818)(z-0.93-0.06\text{i})(z-0.93+0.06\text{i})(z-0.861-0.169\text{i})(z-0.861+0.169\text{i})} \qquad ts=0.1\,seg.$$

Para ts = 0.01 seg., la planta en el dominio de Z se representa con la siguiente ecuación:

$$G(z)=\frac{2.06e\text{-}9(z+9.8)(z+0.99)(z-0.99)(z+0.1)}{(z-0.98)(z-0.993-0.007i)(z-0.993+0.007i)(z-0.987-0.011i)(z-0.987+0.011i)} \qquad ts=0.01\,seg.$$

Se observa entonces que a medida que el tiempo de muestreo tiende a cero, un (*m)* cero se dirige al punto (1,0i), tres ceros (*n-m-1*) se dirigen a los valores de las raices del polinomio de Euler-Frobenius, -9.8990, -1.0000 y -0.1010. En tanto que los polos tienden a la posición (1,0i) del plano z.

c) Verificar que para ts → 0 los polos de Gd(δ) se dirigen hacia los polos de G(s).

Siendo la ecuación de transferencia dada: $G(s)=\frac{5(s+1)}{(s+2)(s^2+1.398s+0.918)(s^2+2.602s+5.444)}$

Para ts = 0.1 seg. se obtiene la siguiente función de transferencia en el dominio de delta:

$$G_d(\delta)=\frac{0.070125(\delta+4.028)(\delta+1.348)(\delta+1.046)(\delta+0.6321)}{(\delta+0.8647)(\delta^2+2.195\delta+1.269)(\delta^2+1.212\delta+0.4591)} \qquad ts=1\,seg.$$

Para ts = 0.1 seg. se obtiene la siguiente función de transferencia en el dominio de delta:

$$G_d(\delta)=\frac{0.00018(\delta+99.41)(\delta+19.05)(\delta+10.92)(\delta+0.951)}{(\delta+1.813)(\delta^2+1.39\delta+0.856)(\delta^2+2.768\delta+4.772)} \qquad ts=0.1\,seg.$$

Para ts = 0.01 seg. se obtiene la siguiente función de transferencia en el dominio de delta:

$$G_d(\delta)=\frac{2.06e\text{-}7(\delta+1080)(\delta+199)(\delta+110)(\delta+0.995)}{(\delta+1.98)(\delta^2+1.397\delta+0.912)(\delta^2+2.622\delta+5.374)} \qquad ts=0.01\,seg.$$

Se comprueba que los polos en el dominio de delta (discreto) tienden a la ubicación de los polos del sistema en el dominio de s (continuo) a medida que el tiempo de muestreo tiende a cero.

d) Para ts → 0 , ¿hacia adonde van los ceros de Gd (δ) ?

Un cero (*m*) en el dominio de delta tienden a la ubicación del cero del sistema en el dominio de s (continuo) y 3 (*n-m-1)* ceros se dirigen hacia menos infinito.

f) Obtener los tres modelos en variables de estados.

La función de transferencia *G(s)* del inciso *a* es $G(s)=\frac{5s+5}{s^5+6s^4+18s^3+30s^2+25s+10}$.

En espacio de estados:

$$\begin{cases} \rho\, x(t) = A\, x(t) + B u(t) \\ y(t) = C\, x(t) + D u(t) \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -6 & -18 & -30 & -25 & -10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

La función de transferencia en el dominio discreto z en variables de estado, para ts = 1 seg.:

$$G(z) = \frac{1.88\text{e-}5\, z^4 + 0.0001\, z^3 - 5.28\text{e-}9\, z^2 - 0.0001\, z - 1.26\text{e-}5}{z^5 - 4.403\, z^4 + 7.782\, z^3 - 6.902\, z^2 + 3.072\, z - 0.548} \qquad \begin{cases} qx(k) = A_q\, x(k) + B_q u(k) \\ y(k) = C_q x(k) + D_q u(k) \end{cases}$$

$$A_q = \begin{bmatrix} 0.485 & -1.437 & -2.289 & -1.862 & -0.728 \\ 0.072 & 0.922 & -0.125 & -0.103 & -0.0407 \\ 0.004 & 0.097 & 0.995 & -0.003 & 0 \\ 0 & 0.004 & 0.099 & 0.999 & -3.69\text{e-}5 \\ 3.69\text{e-}6 & 0 & 0.004 & 0.099 & 0.999 \end{bmatrix} \qquad B_q = \begin{bmatrix} 0.072 \\ 0.004 \\ 0 \\ 3.69\text{e-}6 \\ 7.53\text{e-}8 \end{bmatrix} \qquad C_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D_q = 0$$

La función de transferencia en el dominio discreto delta en variables de estado, para ts = 0.1 seg.:

$$G_d(\delta) = \frac{0.0001\, \delta^4 + 0.024\, \delta^3 + 0.623\, \delta^2 + 4.46\, \delta + 3.704}{\delta^5 + 5.971\, \delta^4 + 17.014\, \delta^3 + 26.183\, \delta^2 + 20.409\, \delta + 7.408} \qquad \begin{cases} \delta\, x(k) = A_d\, x(k) + B_d u(k) \\ y(k) = C_d\, x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -5.149 & -14.375 & -22.895 & -18.626 & -7.287 \\ 0.728 & -0.776 & -1.257 & -1.032 & -0.407 \\ 0.040 & 0.973 & -0.043 & -0.036 & -0.014 \\ 0.001 & 0.049 & 0.998 & -0.0001 & -0.0003 \\ 3.691\text{e-}5 & 0.001 & 0.049 & 0.999 & -7.53\text{e-}6 \end{bmatrix} \qquad B_d = \begin{bmatrix} 0.728 \\ 0.040 \\ 0.0014 \\ 3.691\text{e-}5 \\ 7.534\text{e-}7 \end{bmatrix} \qquad C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad D_d = 0$$

g) Obtener los modelos en simulink de *Gd(δ)* y el modelo de estados en transformada delta.

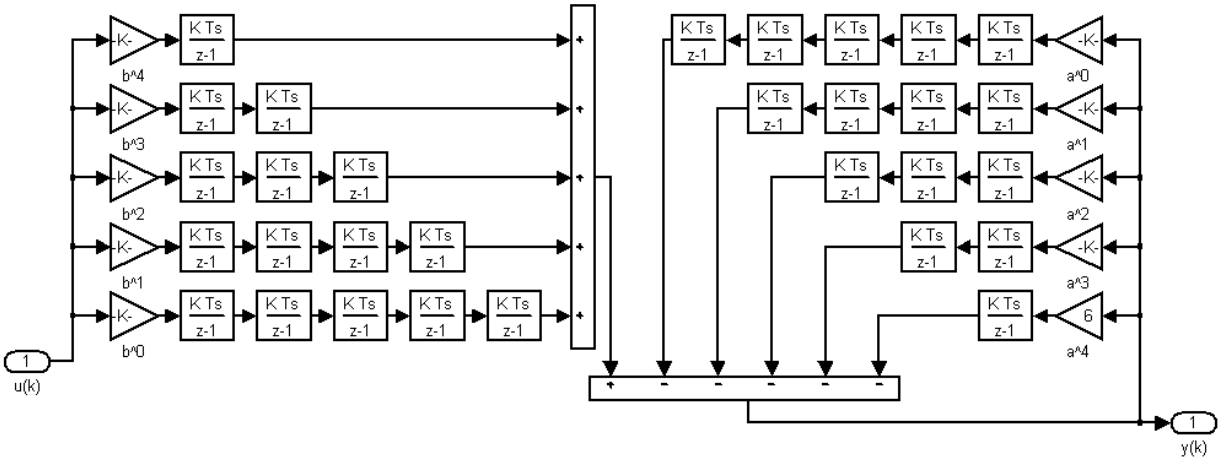
La función de transferencia en el dominio continuo: $G(s) = \dfrac{5s + 5}{s^5 + 6s^4 + 18\, s^3 + 30\, s^2 + 25\, s + 10}$

La función de transferencia en el dominio de delta $G_d(\delta) = \dfrac{b_1 \delta + b_0}{\delta^5 + a_4 \delta^4 + a_3 \delta^3 + a_2 \delta^2 + a_1 \delta + a_0} = \dfrac{y(k)}{u(k)}$

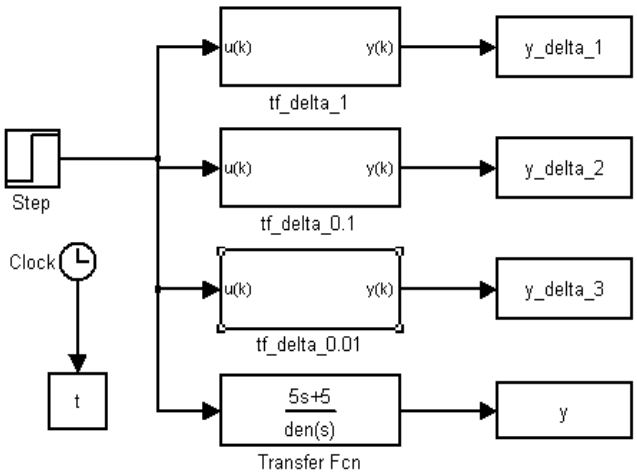
Se utiliza la siguiente ecuación para modelar el sistema en simulink:

$$y(k) = u(k)\, b_1 \delta^{-4} + u(k)\, b_0 \delta^{-5} - y(k)\, a_4 \delta^{-1} - y(k)\, a_3 \delta^{-2} - y(k)\, a_2 \delta^{-3} - y(k)\, a_1 \delta^{-4} - y(k)\, a_0 \delta^{-5}$$

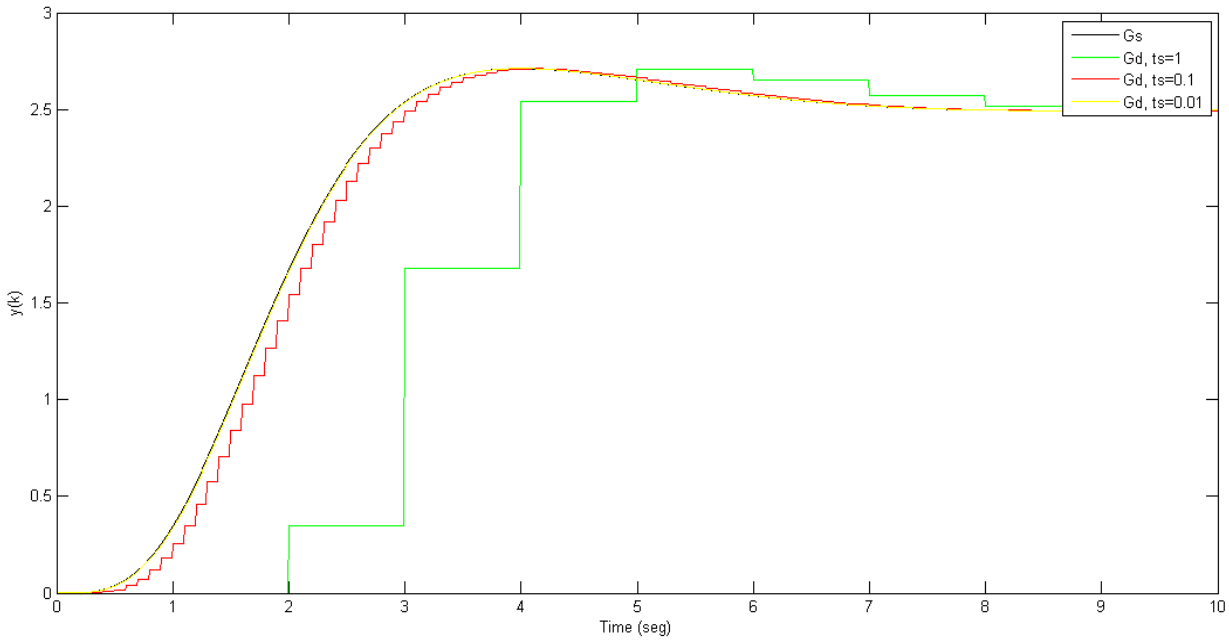
El modelo de $G_d(\delta)$ en simulink:



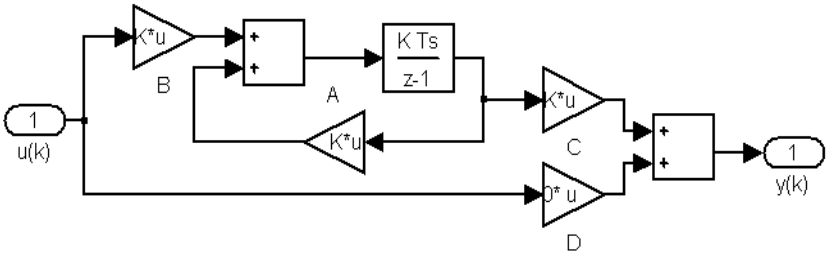
Se realizaron tres modelos del sistema en el dominio discreto (δ) para ts de 1 segundo, 0.1 segundos y 0.01 segundos. Los mismos se compararon con el modelo del sistema en el dominio continuo (s). El modelo resultante es el siguiente:



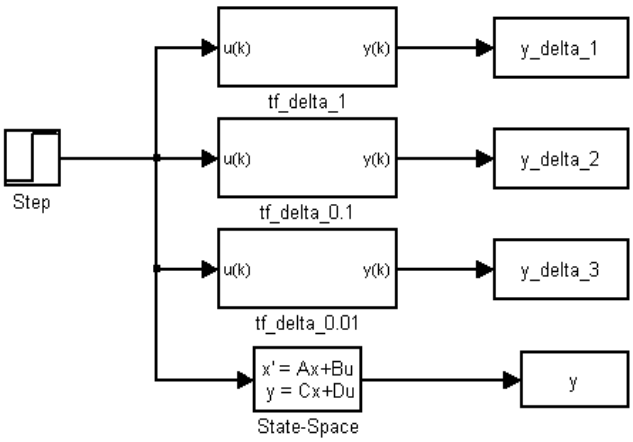
La gráfica de las señales de salidas de los 4 modelos:



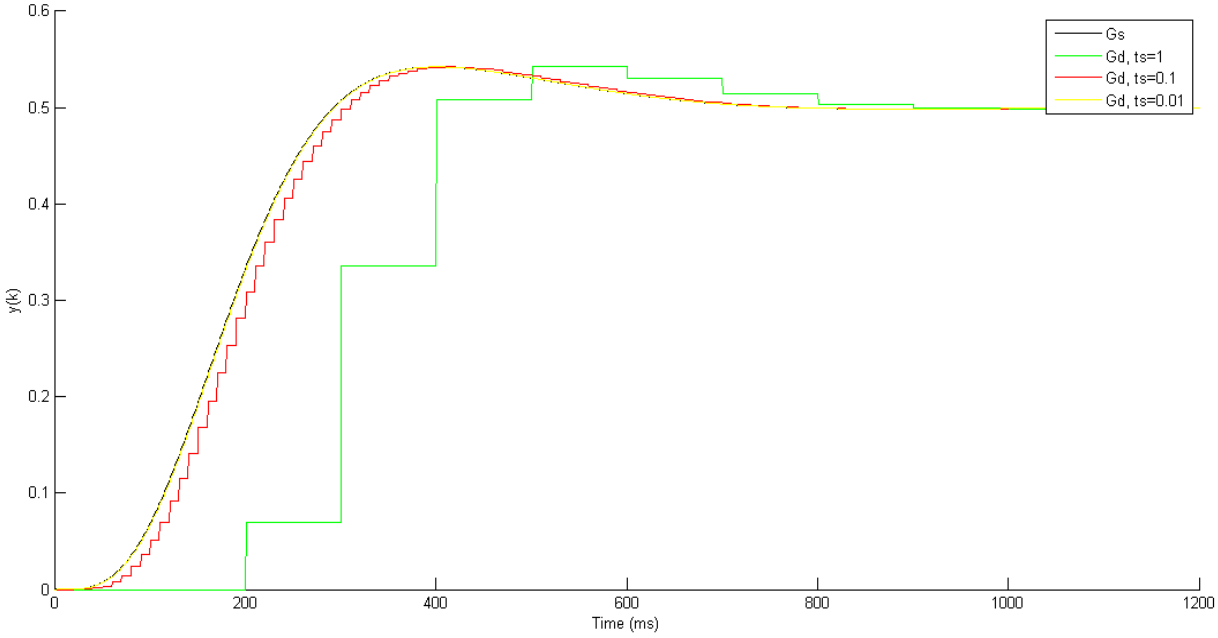
El modelo de estados en transformada delta.



Para el caso de los sistemas modelados en ecuaciones de estado se realizaron tres modelos del sistema en el dominio discreto (δ) para ts =1 segundo, ts = 0.1 segundos y ts =0.01 segundos. Dichos modelos se compararon con el modelo del sistema en el dominio continuo. El modelo de prueba resultante es el siguiente:



La gráfica de las señales de salidas de los cinco modelos:



h) Obtener el modelo de estados en realización balanceada (utilizar el comando delbalre del delta toolbox).

Siendo la función de transferencia $G(s)=\dfrac{5s+5}{s^5+6s^4+18s^3+30s^2+25s+10}$.

En espacio de estados:

$$\begin{cases} \rho\, x(t)=A\,x(t)+B\,u(t) \\ y(t)=C\,x(t)+Du(t) \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} -6 & -18 & -30 & -25 & -10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D=0$$

El modelo en variables de estado en el dominio de delta para ts = 0.1 seg. sin balancear:

$$\begin{cases} \delta\, x(k)=A_d\,x(k)+B_d\,u(k) \\ y(k)=C_d\,x(k)+D_d\,u(k) \end{cases}$$

$$A_d=\begin{bmatrix} -5.149 & -14.375 & -22.895 & -18.626 & -7.287 \\ 0.728 & -0.776 & -1.257 & -1.032 & -0.407 \\ 0.040 & 0.973 & -0.043 & -0.036 & -0.014 \\ 0.001 & 0.049 & 0.998 & -0.0001 & -0.0003 \\ 3.691\text{e-}5 & 0.001 & 0.049 & 0.999 & -7.53\text{e-}6 \end{bmatrix} \qquad B_d=\begin{bmatrix} 0.728 \\ 0.040 \\ 0.0014 \\ 3.691\text{e-}5 \\ 7.534\text{e-}7 \end{bmatrix} \qquad C_d=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad D_d=0$$

El modelo en variables de estado en el dominio de delta balanceado para ts = 0.1 seg.:

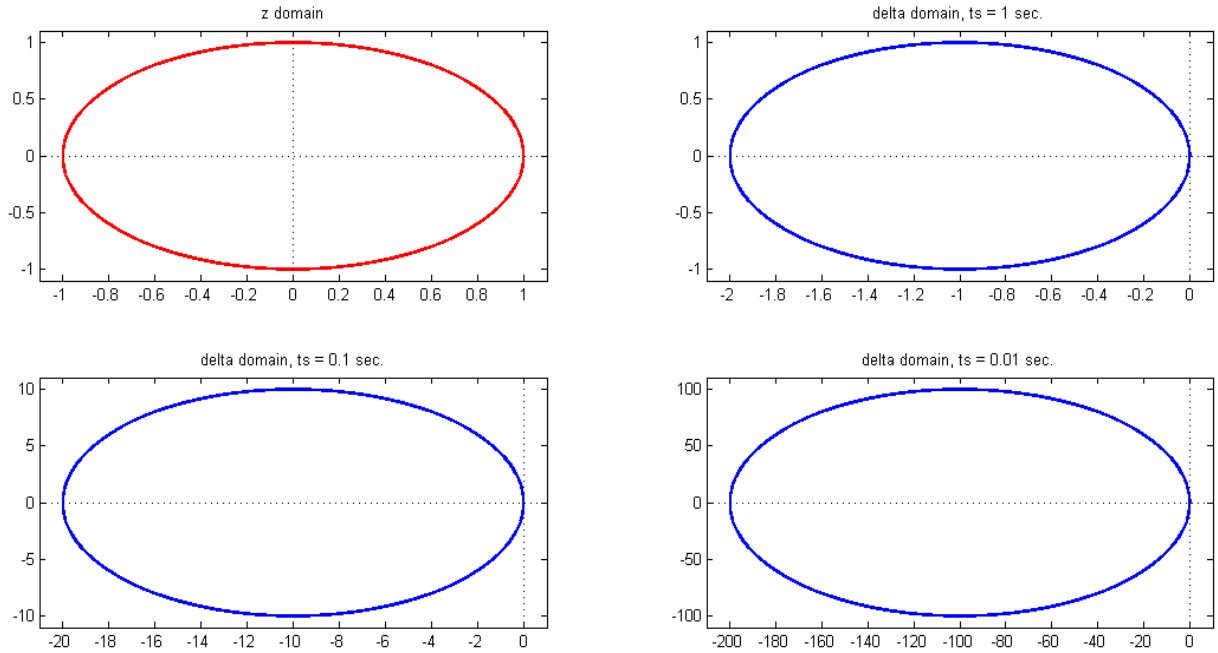
$$A_d = \begin{bmatrix} -0.219 & -0.851 & -0.243 & 0.065 & 0.042 \\ 0.851 & -0.813 & -1.132 & 0.169 & 0.135 \\ -0.243 & 1.132 & -2.013 & 1.573 & 0.651 \\ -0.065 & 0.169 & -1.573 & -0.634 & -0.644 \\ -0.042 & 0.135 & -0.651 & -0.644 & -2.289 \end{bmatrix} \qquad B_d = \begin{bmatrix} 0.405 \\ -0.496 \\ 0.299 \\ 0.066 \\ 0.046 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 0.3916 & 0.5142 & 0.3591 & -0.1089 & -0.07755 \end{bmatrix} \qquad D_d = 0$$

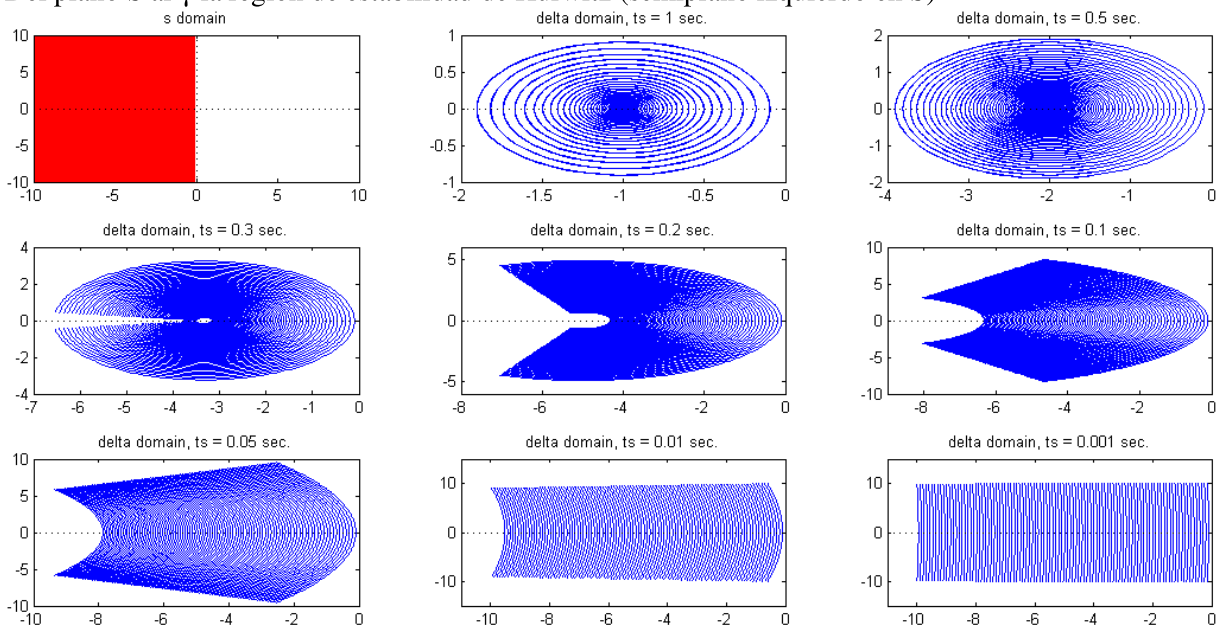
Ejercicio No4 - Realizar los siguientes gráficos para distintos períodos de muestreos Δ

Se toman tres tiempos de muestreo; 1, 0.1 y 0.01 segundos.

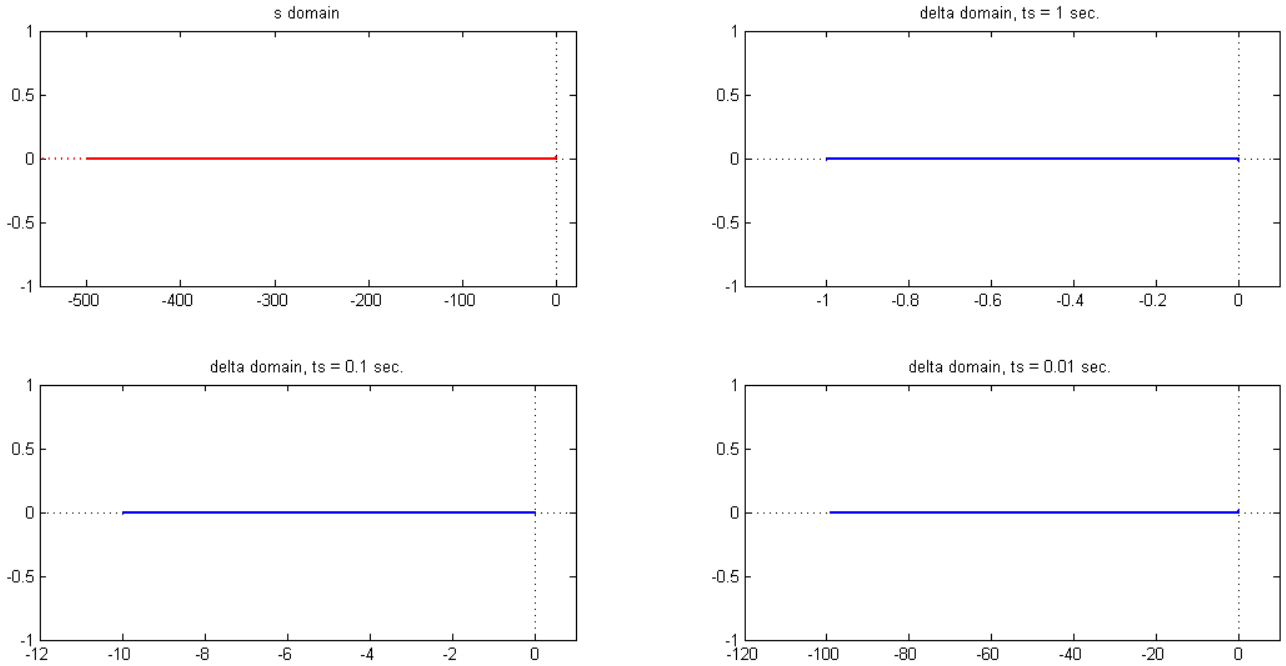
a) Del plano Z al γ la región de estabilidad de Hurwitz



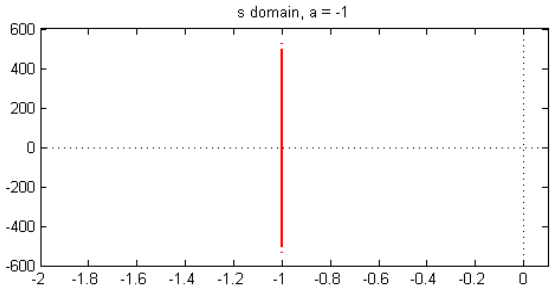
b) Del plano S al γ la región de estabilidad de Hurwitz (semiplano izquierdo en S)

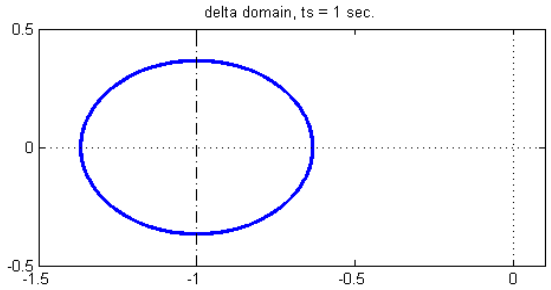


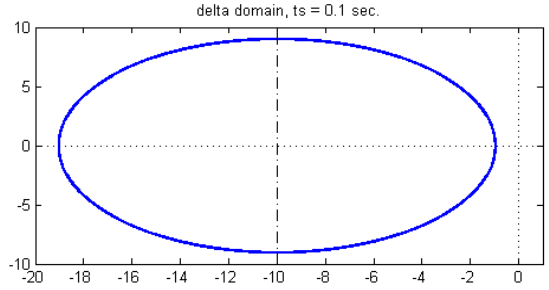
c) El eje real negativo en el plano S al γ

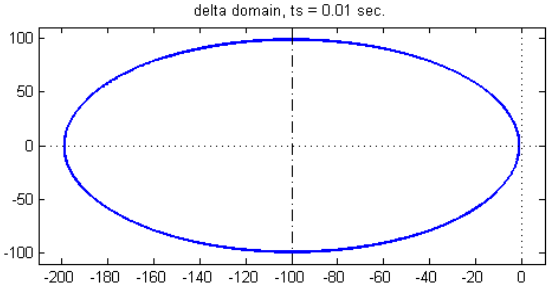


d) La región de polos con parte real constante en S a γ

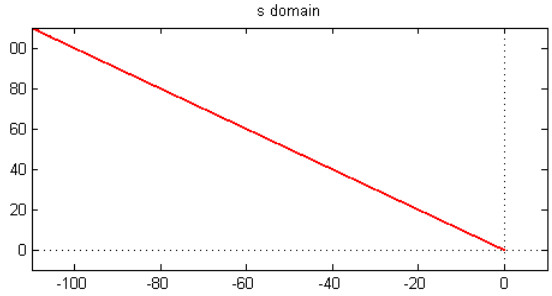


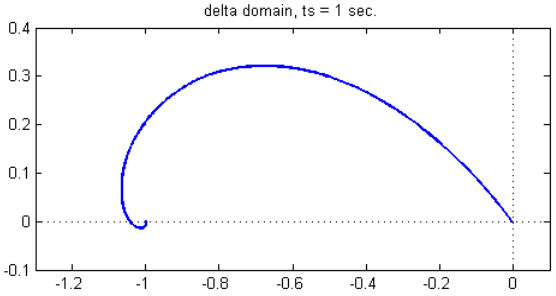


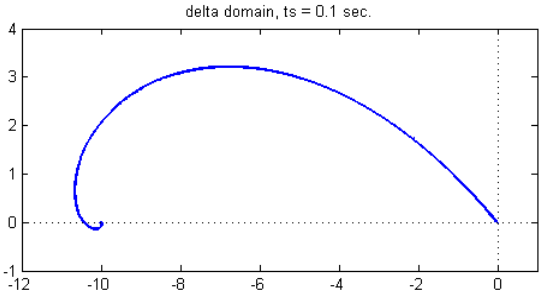


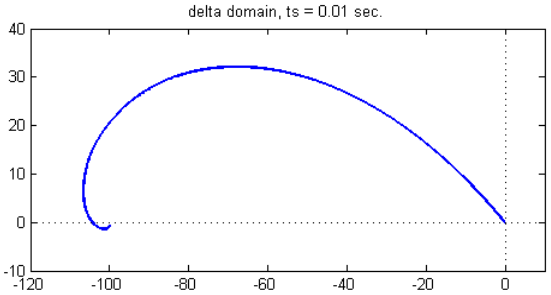


e) La región de los polos con relación de amortiguamiento constante en el plano S a γ









Ejercicio No5

a) Diseñar un filtro pasabajos de 50 Hz de orden 5 en el continuo

b) Convertir a un modelo balanceado de estados.

c) Discretizar a modelos de estados en los operadores q y δ para Δ=.001seg.

d) Rebalancer los modelos.

e) Construir los modelos discretos de Simulink.

a) Para diseñar el filtro se utiliza la función `butter` de MATLAB, como indica el siguiente código:

```
fc = 2* pi* 50;                % Frecuencia de corte (radianes)
orden = 5;                     % Orden del filtro
[A,B,C,D] = butter(orden, fc, 's'); % Filtro pasabajos Butterworth
                                    % analógico
```

La función `butter` entrega directamente los valores de las matrices del modelo de estados en el dominio del continuo. Estas son:

$$\begin{cases} \rho\, x(t) = A\, x(t) + B u(t) \\ y(t) = C\, x(t) + D u(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -314.16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 314.16 & -508.32 & -314.16 & 0 & 0 \\ 0 & 314.116 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 314.16 & -194.16 & -314.16 \\ 0 & 0 & 0 & 314.16 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 314.16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

b) Convertir a modelo balanceado de estados.

$$A_b = \begin{bmatrix} -18.37 & -173.7 & -44.33 & 32.34 & 10.18 \\ 173.7 & -73.31 & -216.4 & 71.47 & 25.27 \\ -44.33 & 216.4 & -169.4 & 231.3 & 61.92 \\ -32.34 & 71.47 & -231.3 & -298.6 & -212.2 \\ 10.18 & -25.27 & 61.92 & 212.2 & -456.9 \end{bmatrix} \quad B_b = \begin{bmatrix} 35.79 \\ -9.389 \\ 8.705 \\ 4.881 \\ -1.611 \end{bmatrix}$$

$$C_b = \begin{bmatrix} 5.79 & 9.38 & 8.7 & -4.88 & -1.61 \end{bmatrix} \quad D_b = 0$$

c) Discretizar a modelos de estados en los operadores q y δ para Δ=.001seg.

El modelo de estados para el operador q, para Δ = 0.001 seg:

$$A_q = \begin{bmatrix} 3.99 & -6.45 & 5.272 & -2.175 & 0.3618 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_q = \begin{bmatrix} 2.148\text{e-}5 & 0.000469 & 0.001004 & 0.0003346 & 1.091\text{e-}5 \end{bmatrix} \quad D_q = 0$$

El modelo en variables de estado para el operador δ, para Δ = 0.001 seg.:

$$A_\delta = \begin{bmatrix} -269.597 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 204.858 & -433.617 & -242.269 & 0 & 0 \\ 37.411 & 242.269 & -41.617 & 0 & 0 \\ 3.981 & 38.601 & 276.560 & -219.516 & -280.871 \\ 0.33 & 4.311 & 45.57 & 280.871 & -45.928 \end{bmatrix} \qquad B_\delta = \begin{bmatrix} 269.597 \\ 37.411 \\ 4.206 \\ 0.33 \\ 0.021 \end{bmatrix}$$

$$C_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_\delta = 0$$

d) El modelo en variables de estado balanceado en el dominio de z para ts = 0.001 seg.:

$$A_q = \begin{bmatrix} 0.9675 & -0.1677 & -0.0252 & 0.0192 & 0.0032 \\ 0.1677 & 0.8949 & -0.198 & 0.0411 & 0.001 \\ -0.0251 & 0.198 & 0.8027 & 0.1899 & 0.0281 \\ -0.0192 & 0.0411 & -0.1899 & 0.7058 & -0.1481 \\ 0.0032 & -0.001 & 0.0281 & 0.1481 & 0.6189 \end{bmatrix} \qquad B_q = \begin{bmatrix} 0.00643 \\ -0.00923 \\ 0.007297 \\ 0.003099 \\ -0.0006261 \end{bmatrix}$$

$$C_q = \begin{bmatrix} 5.798 & 9.389 & 8.705 & -4.881 & -1.611 \end{bmatrix} \qquad D_q = 0$$

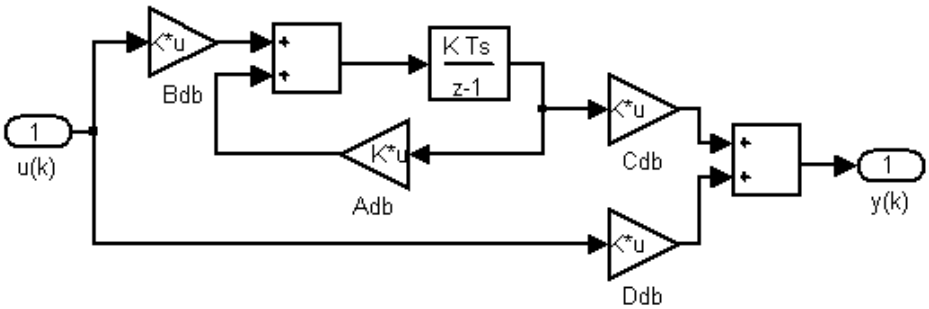
El modelo en variables de estado balanceado en el dominio de delta para ts = 0.001 seg.:

$$A_\delta = \begin{bmatrix} -32.529 & -167.691 & -25.179 & 19.255 & 3.264 \\ 167.691 & -105.110 & -198.0006 & 41.095 & 9.9413 \\ -25.179 & 198.0006 & -197.239 & 189.898 & 28.151 \\ -19.255 & 41.095 & -189.898 & -294.239 & -148.130 \\ 3.264 & -9.941 & 28.151 & 148.130 & -381.135 \end{bmatrix} \qquad B_\delta = \begin{bmatrix} 6.430 \\ -9.229 \\ 7.297 \\ 3.099 \\ -0.626 \end{bmatrix}$$

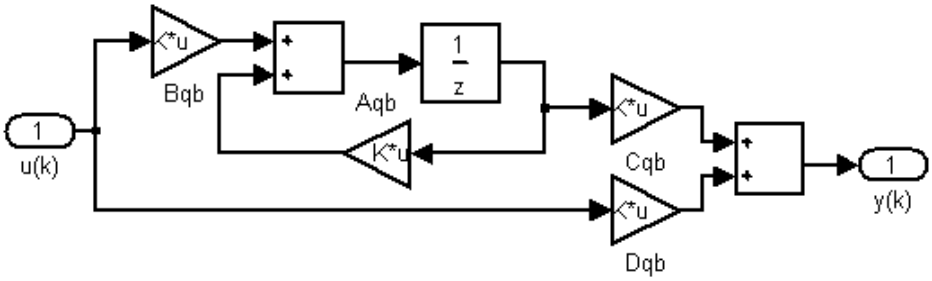
$$C_\delta = \begin{bmatrix} 5.798 & 9.389 & 8.705 & -4.881 & -1.611 \end{bmatrix} \qquad D_\delta = 0$$

e) Los modelos discretos de Simulink se implementan según los siguientes modelos:

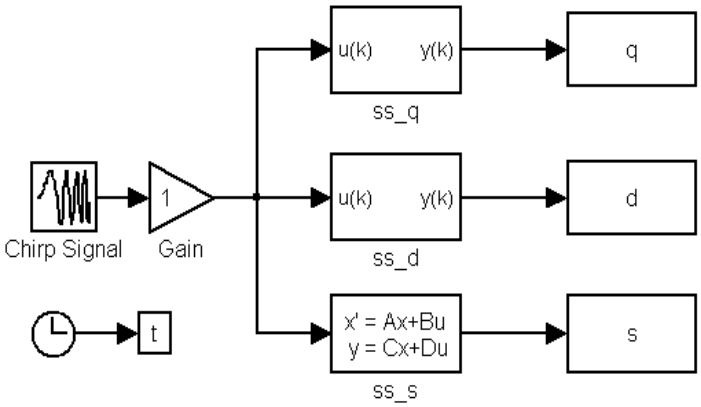
Modelo para variables de estado balanceado en el dominio de delta:



Modelo para variables de estado balanceado en el dominio de q:

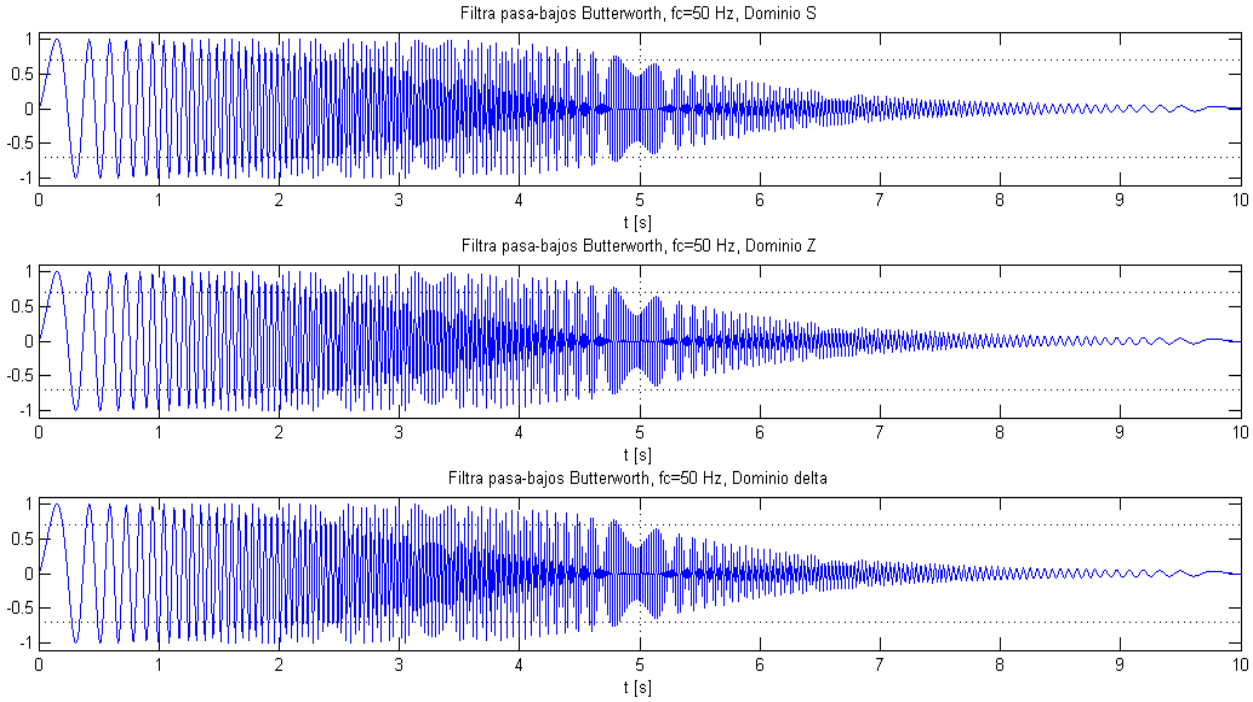


Se comparan los modelos continuo y discretos q y delta mediante el siguiente modelo de prueba (testbed):



Se barren los tres filtros con una señal senoidal que aumenta su frecuencia en forma lineal desde 1Hz hasta 100Hz en el lapso de 10 segundos.

A continuación se grafican las tres señales de salida de los filtros para su comparación:



Se observa que las tres señales reducen su potencia a la mitad, es decir la tensión de salida del filtro cae a 0.707V, a partir de los 5 segundos. Tiempo en el cual la frecuencia de entrada llega a los 50Hz, la frecuencia de corte de los tres filtros.

Se concluye que los 3 filtros, el modelo continuo y los dos discretos, funcionan correctamente.