

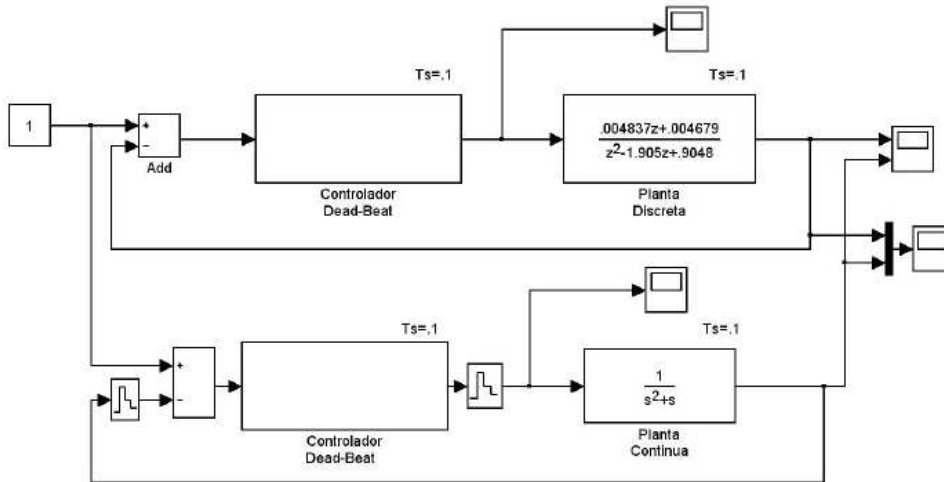
Práctica: Controladores de tiempo finito

Alumno: Rodrigo González.

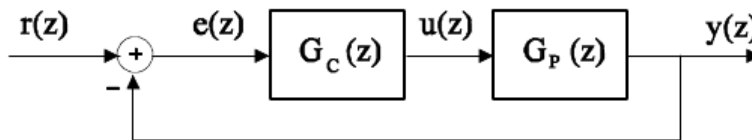
Ejercicio 1. Para la siguiente planta continua

$$G_P(s) = \frac{1}{s^2 + s}$$

a) Diseñar un controlador de tiempo finito mínimo (CTF) con período de muestreo $T_s = 1$ y verificar el comportamiento en la planta discreta (que se utiliza para el diseño) y la planta continua (la que se supone la verdadera), ver figura.



Tomando como base el siguiente sistema:



Sea $G_p(z)$ la representación discreta de función de transferencia de la planta dada:

$$G_P(z) = \frac{0.004837z + 0.004679}{z^2 - 1.905z + 0.9048} = \frac{0.004837z^{-1} + 0.004679z^{-2}}{1 - 1.905z^{-1} + 0.9048z^{-2}} = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Utilizando la ecuación característica de un controlador de tiempo finito para una entrada escalón

$$G_C(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} \quad ,$$

siendo $P(z) = q_0 B(z)$, $Q(z) = q_0 A(z)$, $q_0 = \left(\sum_{i=1}^m b_i \right)^{-1}$ y $m=2$ resulta:

$$G_c(z) = \frac{105.1 - 200.2z^{-1} + 95.08z^{-2}}{1 - 0.5083z^{-1} - 0.4917z^{-2}}$$

expresión en términos de exponentes negativos de z.

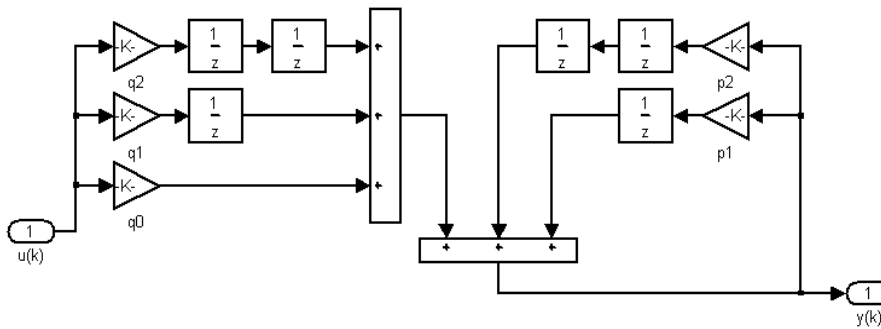
Se verifica el comportamiento de la planta discreta y la planta continua utilizando Simulink. Para ello se modela la ecuación del controlador de la siguiente manera:

$$G_c(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2}} = \frac{y[k]}{u[k]} \quad u[k](q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}) = y[k](1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2}) \Rightarrow$$

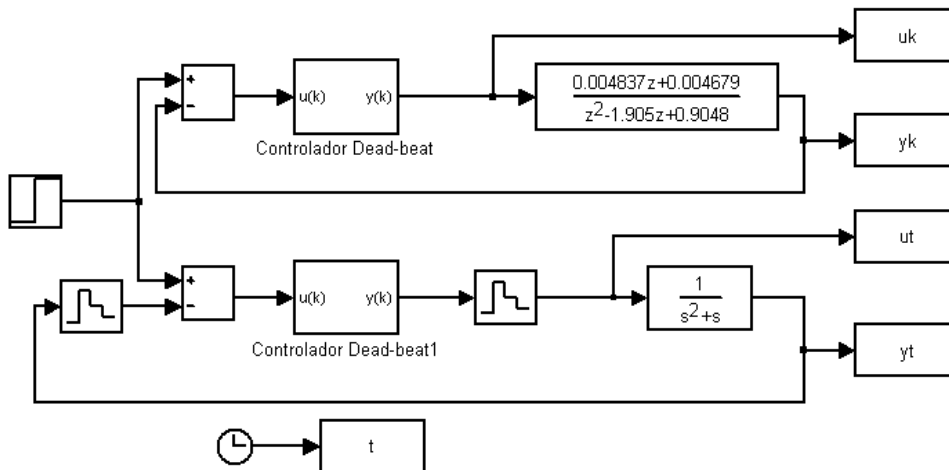
$$\Rightarrow u[k]q_0 + u[k]q_1 z^{-1} + u[k]q_2 z^{-2} = y[k] - y[k]p_1 z^{-1} - y[k]p_2 z^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y[k] = u[k]q_0 + u[k]q_1 z^{-1} + u[k]q_2 z^{-2} + y[k]p_1 z^{-1} + y[k]p_2 z^{-2}$$

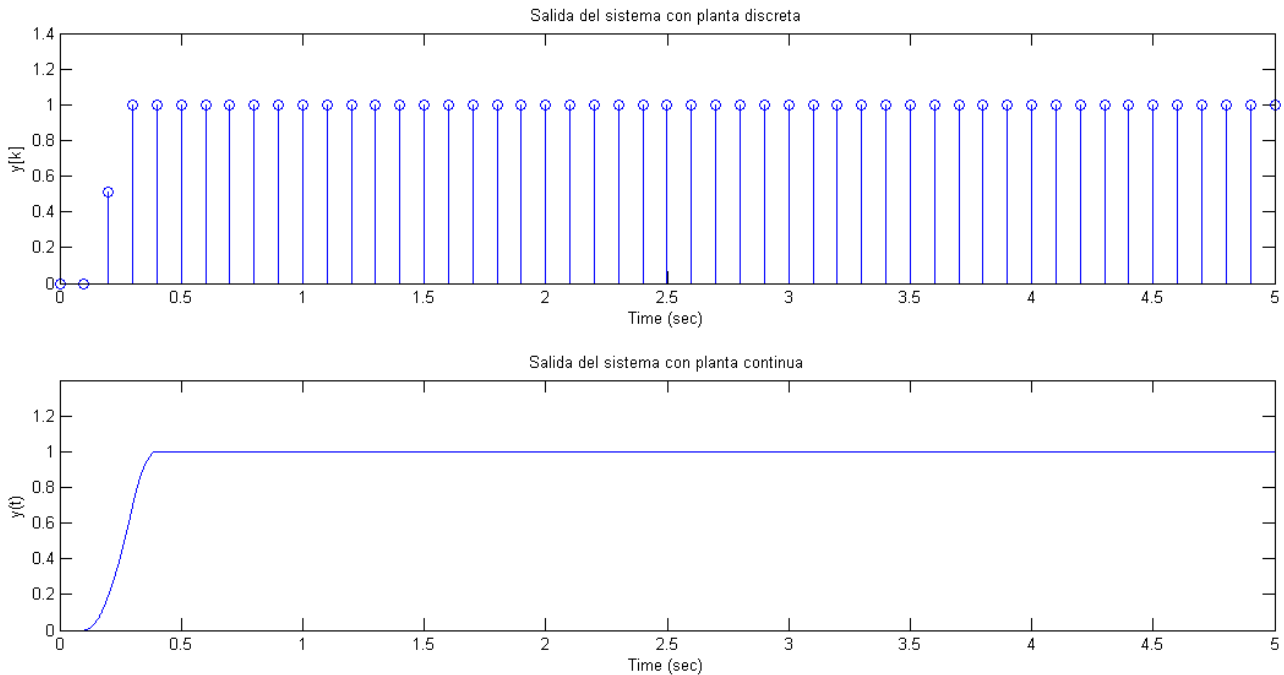
La ecuación anterior modelada en Simulink:



El modelo de comparación del comportamiento de las plantas discreta y continua:



Las señales de acción de control y de respuesta de los sistemas con la planta discreta y continua:



Se observa como el sistema llega al valor de referencia en dos ($m=2$) tiempos de muestreo a partir de la primera acción de control en $k=1$.

b) Repetir el punto a para un controlador de tiempo finito de orden incrementado (CTFI).

Siendo la ecuación característica del controlador de tiempo finito de orden incrementado para la planta dada

$$G_c(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + q_3 z^{-3}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - p_3 z^{-3}}$$

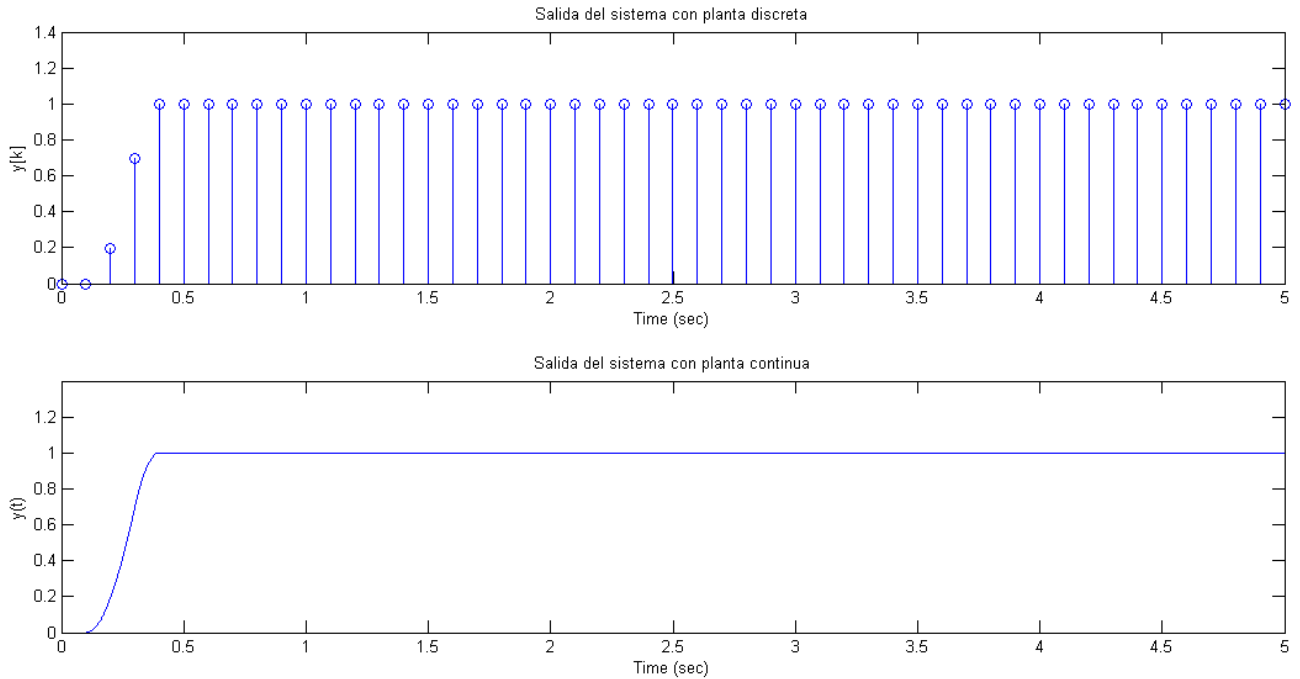
Las constantes de la ecuación característica se obtienen con las siguientes ecuaciones. El valor de $u(0)$ se fija en forma arbitraria, tomando un valor de referencia dado por $u(0) > [(1 - a_1) \cdot b_i]^{-1}$

$$\begin{aligned} a_1 &= -1.905 & q_0 &= u_0 & p_1 &= q_0 \cdot b_1 \\ a_2 &= 0.9048 & q_1 &= q_0 \cdot (a_1 - 1) + (1/b_i) & p_2 &= q_0 \cdot (b_2 - b_1) + (b_1/b_i) \\ b_1 &= 0.004837 & q_2 &= q_0 \cdot (a_2 - a_1) + (a_1/b_i) & p_3 &= (-q_0 \cdot b_2) + (b_2/b_i) \\ b_2 &= 0.004679 & q_3 &= (-q_0 \cdot a_2) + (a_2/b_i) & & \\ b_i &= (b_1 + b_2) = 0,0095 & & & & \\ u(0) &= 40 > [(1 - a_1) \cdot b_i]^{-1} & & & & \end{aligned}$$

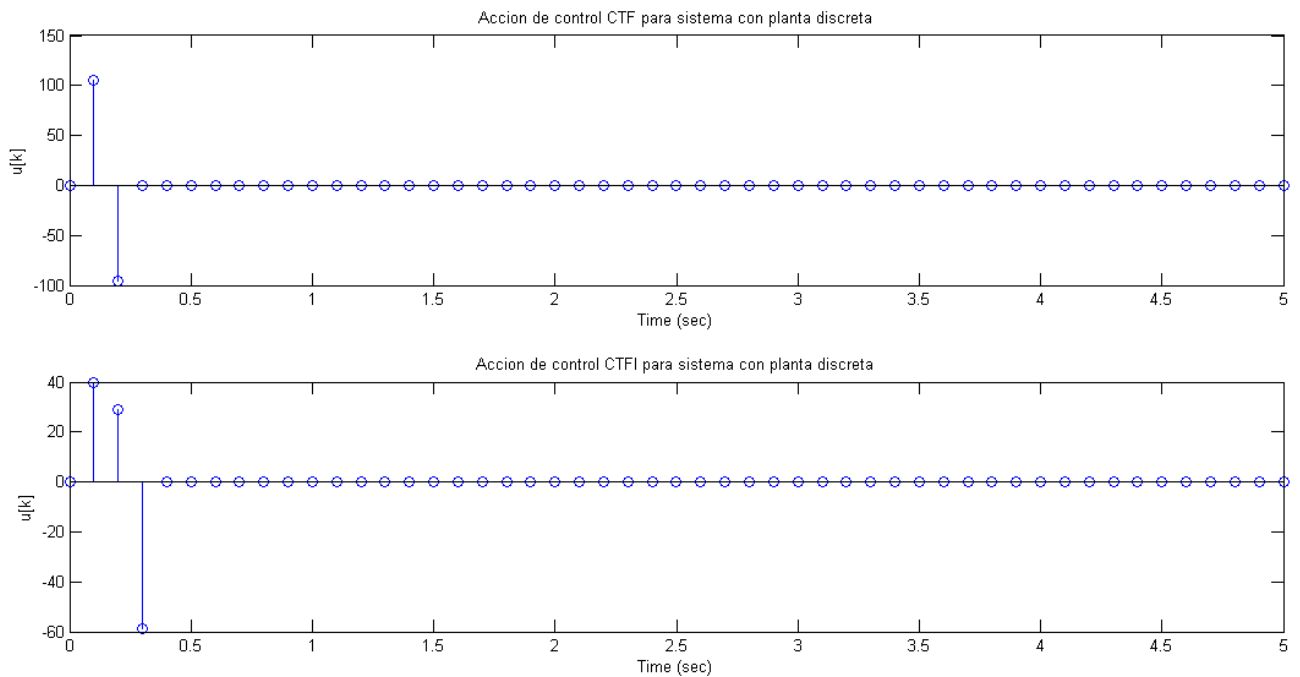
Resultando la ecuación característica del controlador de tiempo finito incrementado:

$$G_c(z) = \frac{40 - 11.11 z^{-1} - 87.8 z^{-2} + 58.89 z^{-3}}{1 - 0.1935 z^{-1} - 0.502 z^{-2} - 0.3045 z^{-3}}$$

Las señales de salida de las plantas discreta y continua utilizando Simulink:

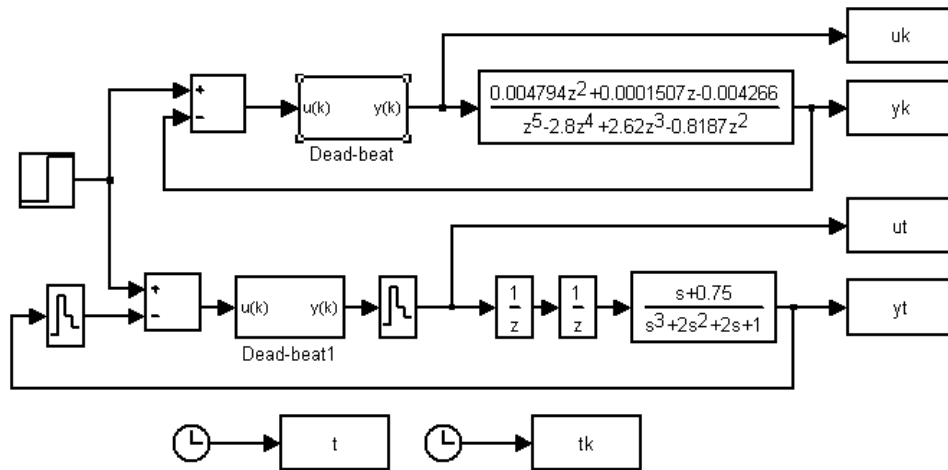


c) Graficar y comparar las acciones de control en ambos casos.

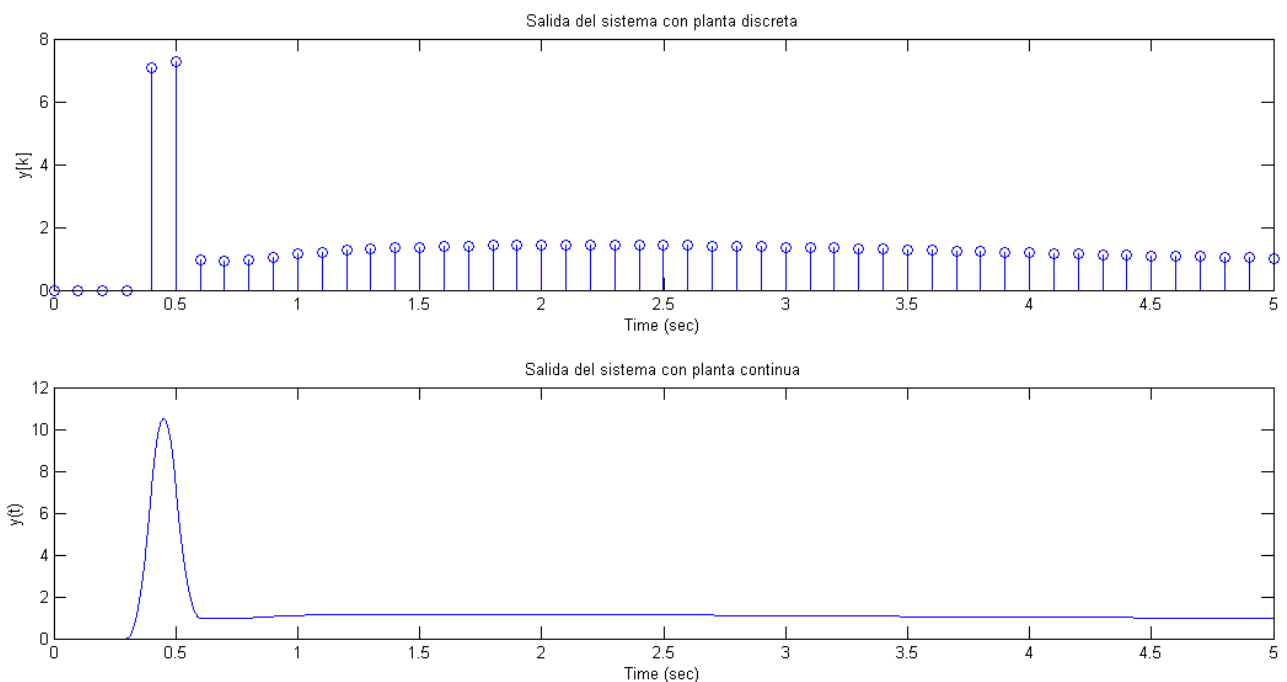


Se verifica que con el CTFI la acción de control tiene menor amplitud que la del CTF, como se fijó en las condiciones de diseño, esto a costa de aumentar el tiempo de establecimiento de la salida en el valor en régimen del sistema.

Las gráficas se representan con el siguiente modelo:



Las gráficas de las señales de salidas de los sistemas con planta digital y planta continua:



Se observa en las gráficas que ambos sistemas entran en régimen con un retardo de 5 ($d+m$) ciclos de muestreo. También se observa un transitorio notable en los instantes de muestreo $k=3$ y $k=4$.

b) Repetir el punto a para un controlador de tiempo finito de orden incrementado.

La ecuación característica de la planta discreta:

$$G_p(z) = \frac{0.004794 z^{-3} + 0.0001507 z^{-4} - 0.004266 z^{-5}}{1 - 2.8 z^{-1} + 2.62 z^{-2} - 0.8187 z^{-3}} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + a_5 z^{-5}}$$

La ecuación característica del controlador de tiempo finito de orden incrementado para la planta dada es:

$$G_c(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + q_3 z^{-3} + q_4 z^{-4}}{1 - p_3 z^{-3} - p_4 z^{-4} - p_5 z^{-5} - p_6 z^{-6}}$$

Se fija el valor de $u(0)=500$ según la condición $u(0) > [(1-a_1) \cdot b_i]^{-1}$.

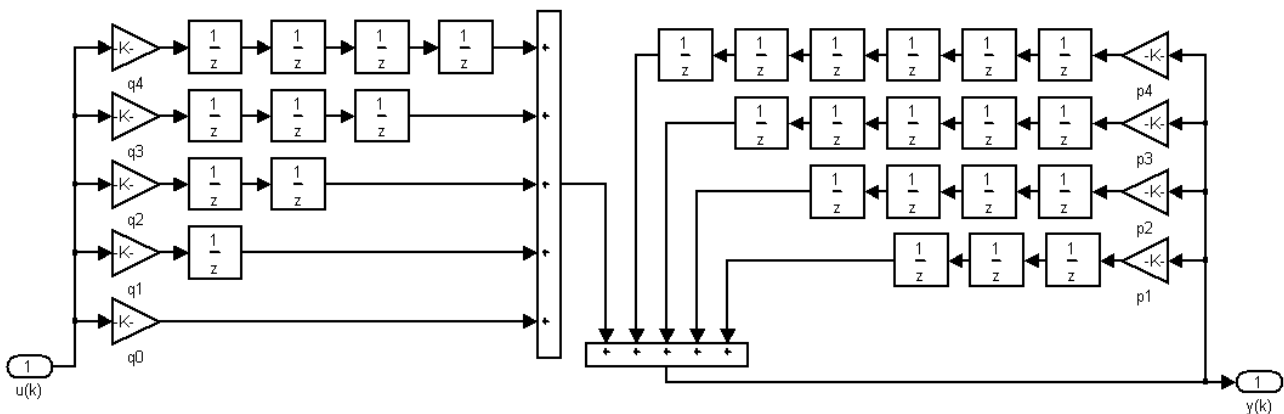
Los coeficientes de la ecuación característica se obtienen con las siguientes ecuaciones:

$a_1 = -2.8$		
$a_2 = 2.62$		
$a_3 = -0.8187$		
$a_4 = 0$	$b_i = b_3 + b_4 + b_5$	$p_1 = q_0 \cdot b_1$
$a_5 = 0$	$q_0 = u(0)$	$p_2 = q_0 \cdot (b_2 - b_1) + (b_1/b_i)$
$b_1 = 0$	$q_1 = q_0 \cdot (a_1 - 1) + (1/b_i)$	$p_3 = q_0 \cdot (b_3 - b_2) + (b_2/b_i)$
$b_2 = 0$	$q_2 = q_0 \cdot (a_2 - a_1) + (a_1/b_i)$	$p_4 = q_0 \cdot (b_4 - b_3) + (b_3/b_i)$
$b_3 = 0.004794$	$q_3 = q_0 \cdot (a_3 - a_2) + (a_2/b_i)$	$p_5 = q_0 \cdot (b_5 - b_4) + (b_4/b_i)$
$b_4 = 0.0001507$	$q_4 = (-q_0 \cdot a_3) + (a_3/b_i)$	$p_6 = (-q_0 \cdot b_5) + (b_5/b_i)$
$b_5 = -0.004266$		

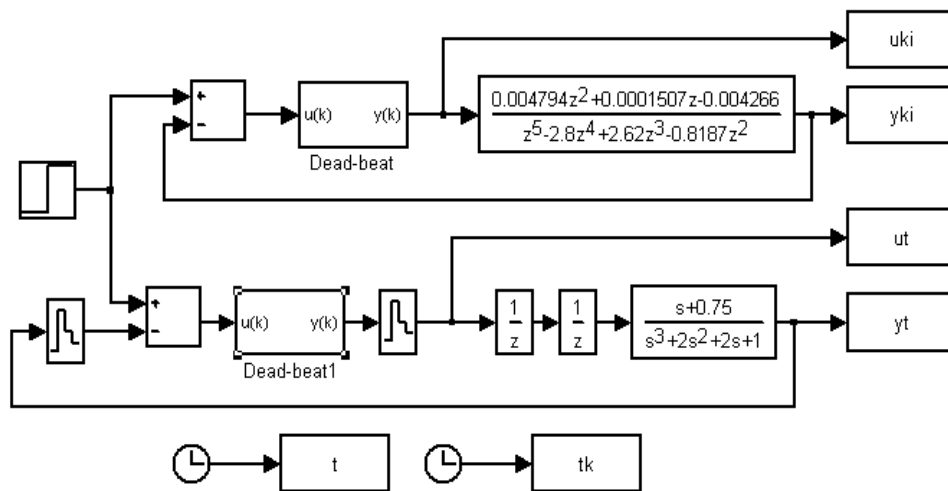
Resultando la ecuación característica del controlador de tiempo finito incrementado:

$$G_c(z) = \frac{500 - 426.6 z^{-1} - 1416 z^{-2} + 2141 z^{-3} - 796.9 z^{-4}}{1 - 2.397 z^{-3} - 4.742 z^{-4} + 1.986 z^{-5} + 4.153 z^{-6}}$$

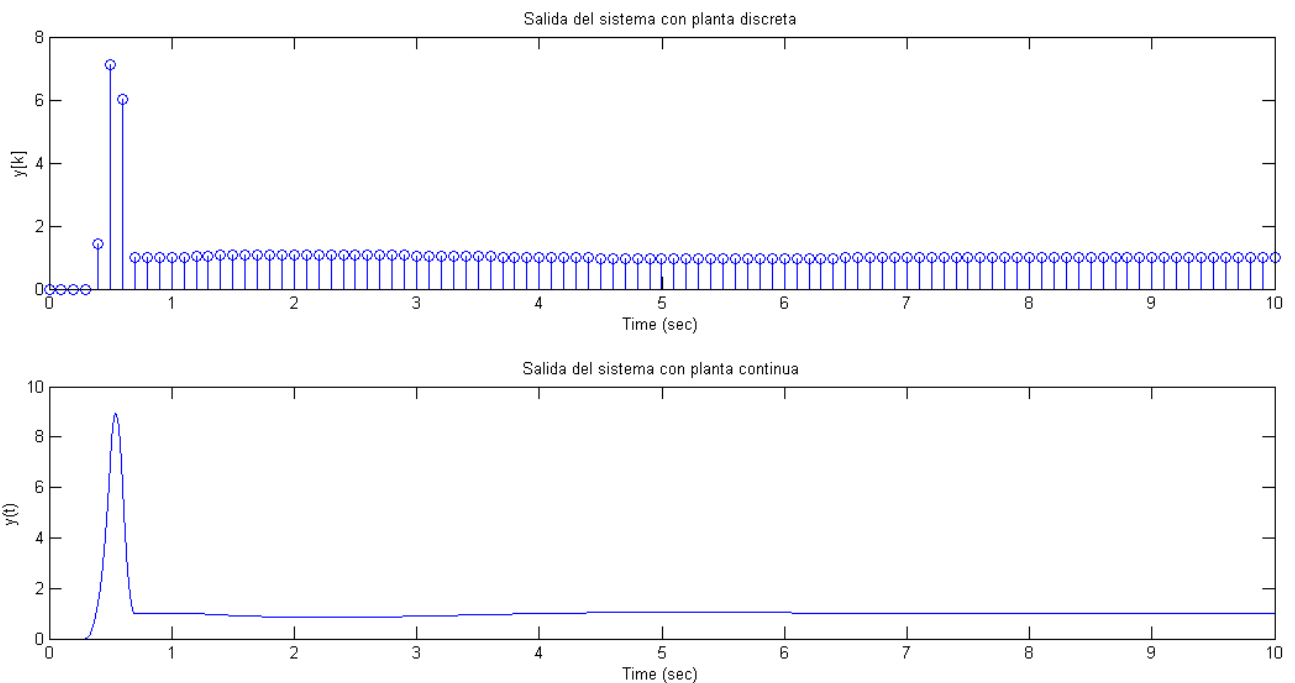
La ecuación característica de $G_c(z)$ se modela con Simulink:



El modelo para obtener las señales de salida de las plantas discreta y continua:

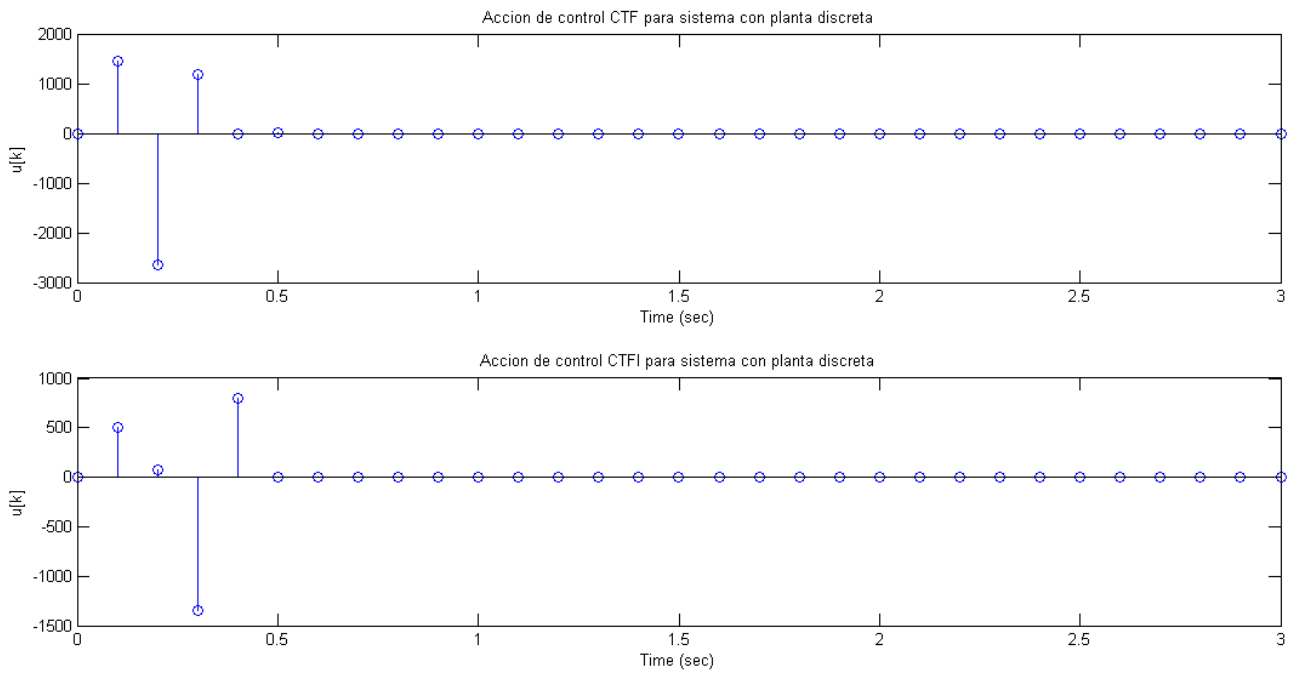


La gráfica de las señales de salida de las plantas discreta y continua utilizando Simulink:



Se observa que tiempo de establecimiento del sistema ha aumentado en 1 tiempo de muestreo respecto al controlador de tiempo finito, lo cual es esperable.

c) Graficar y comparar las acciones de control en ambos casos.



Para el caso de la planta con un retardo puro se observa que la acción de control del CTFI alcanza valores menores respecto a la del CTI, a expensas de agregar una acción de control más.