Práctica: Controladores de estado.

Alumno: Rodrigo González.

Control de un motor de corriente continua.
Dado un motor de corriente continua cuyo esquema se muestra en la Figura 1 y cuyo modelo se detalla en la Figura 2

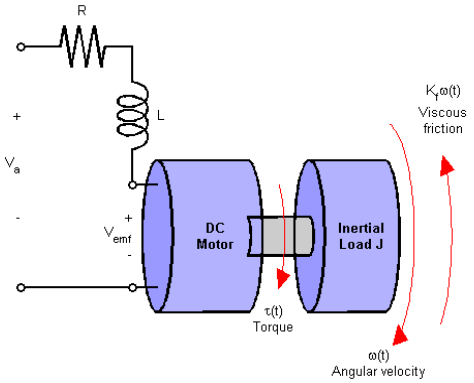

Fig.1: esquema del motor de corriente continua.

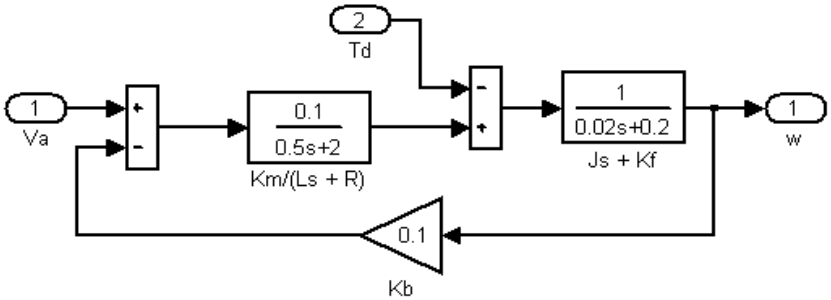

Fig.2: modelo de la ecuación característica del motor.

Las constantes físicas del sistema son:

$$
\begin{aligned}
R &= 2.0\,\Omega \\
L &= 0.5\,Hy \\
Km &= 0.1\,\text{(constante de torque)} \\
Kb &= 0.1\,\text{(constante electromotriz)} \\
Kf &= 0.2\,Nms \\
J &= 0.02\,kg.m^2/s^2
\end{aligned}
$$

La entrada del sistema es la tensión de armadura *Va* y la salida controlada es la velocidad angular del eje ω(t).

El objetivo del control es seguir la referencia de velocidad que cambia en forma de escalones. La velocidad de referencia es entre -3 y 3 rad/seg

Dos ecuaciones diferenciales describen el comportamiento del motor, una respecto a la corriente inducida de armadura y otra respecto a la velocidad angular,

$$\frac{d I_a}{dt}=-\frac{R}{L} I_a(t)-\frac{K_b}{L}\omega(t)+\frac{1}{L} V_a(t) \quad , \quad \frac{d\omega}{dt}=-\frac{1}{J} K_f \omega(t)+\frac{1}{J} K_m I_a(t) \quad .$$

La representación en ecuaciones de estado del motor según dichas ecuaciones diferenciales es,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=A.\boldsymbol{x}(t)+B.u(t) \\ y(t)=C.\boldsymbol{x}(t)+D.u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{K_f}{J} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} I_a \\ \omega \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.V_a(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} I_a \\ \omega \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.V_a(t) \end{cases} ,$$

siendo:

- Los estados del sistema $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_a \\ \omega \end{bmatrix}$, la corriente de armadura y la velocidad angular de salida del motor.
- La acción de control está dada por la tensión de armadura, $u(t)=V_a(t)$.
- La salida del sistema es la velocidad angular del motor, $y(t)=\omega(t)$.

Los valores de las matrices de la ecuación en variables de estados según las constantes del motor quedan definidos como

$$A=\begin{bmatrix} -4 & -0.2 \\ 5 & -10 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } D=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \ .$$

Para encontrar el adecuado tiempo de muestreo se analiza la respuesta al escalón unitario del motor a lazo abierto.

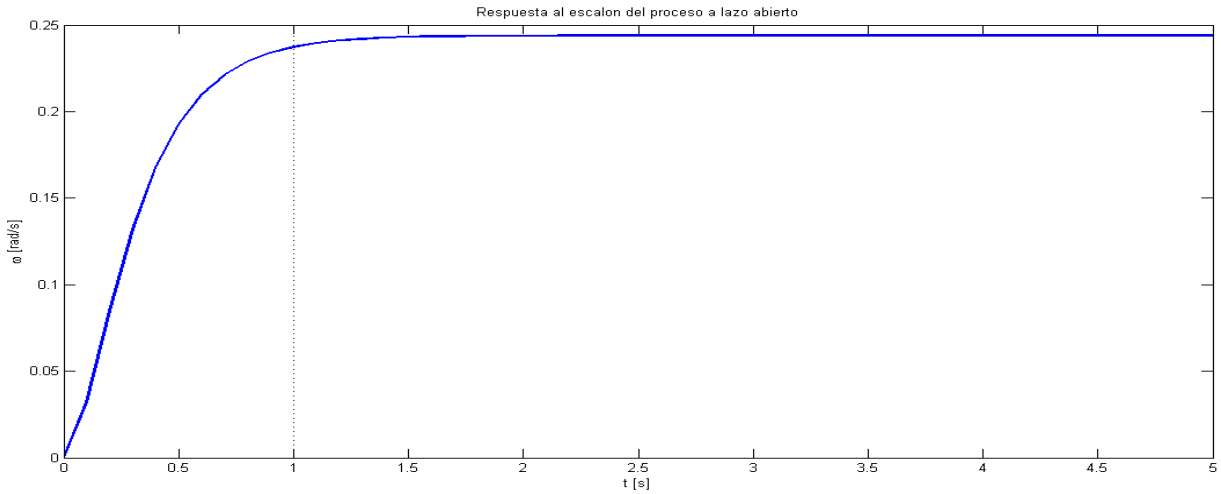

Fig.3: respuesta al escalón unitario del sistema a lazo abierto.

Se observa que el motor alcanza el valor de salida en régimen prácticamente transcurrido 1 segundo. Se toma como criterio utilizar un tiempo de muestreo 10 veces más pequeño que este tiempo. Por tanto el tiempo de muestreo se fija en $ts = 0.1$ segundos.

Los valores de las matrices de la ecuación en variables de estados del motor en el dominio discreto Z para un $ts = 0.1$ segundos quedan definidos como

$$A_z = \begin{bmatrix} 0.6676 & -0.01006 \\ 0.2516 & 0.3656 \end{bmatrix},\ B_z = \begin{bmatrix} 0.1646 \\ 0.03199 \end{bmatrix},\ C_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } D_z = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \ .$$

La función de transferencia en el dominio discreto

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{0.03199\,z + 0.02007}{z^2 - 1.033\,z + 0.2466} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_2} \ .$$

Controladores de estado

1) Diseñar un controlador de estado de tiempo finito (CETF). Resolver para referencia igual a cero y distinta de cero.

Antes de implementar un controlador de estado de tiempo finito se debe garantizar que el proceso sea controlable, esto es, el rango de la matriz de controlabilidad Q_c debe ser mayor o igual al orden del sistema $m = 2$. La matriz de controlabilidad a partir de la forma canónica controlable es

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1.033 \end{bmatrix}$$, con $Rango\, Q_c = 2 = m$. Entonces sistema es completamente controlable.

El CETF lleva al sistema de un estado inicial nulo a un $x(m) \neq 0$ en m pasos. Para ello se realimentan los estados con una ley

$$u(k) = -\boldsymbol{k_c}.\boldsymbol{x}(k) \quad \text{, con} \quad \boldsymbol{k_c} = [a_n\ a_{n-1} \ldots a_1]$$

donde los coeficientes a_n se obtienen de la matriz canónica controlable A_c , con la forma

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & . & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ -a_n & . & . & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} \ .$$

Siendo la matriz canónica controlable del motor bajo estudio

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2466 & 1.033 \end{bmatrix} \ .$$

Por tanto, los coeficientes del vector $\boldsymbol{k_c}$ quedan definidos como

$$\boldsymbol{k_c} = [-0.2466 \quad 1.033] \quad .$$

Debido a que los valores del vector $\boldsymbol{k_c}$ se definen a partir de la forma canónica controlable, es necesario encontrar una matriz H que adecue a $\boldsymbol{k_c}$ para el modelo discreto del motor no canónico controlable. Se puede demostrar que H está definida como $H = Q_c.(Q)^{-1}$, siendo Q la matriz de controlabilidad del modelo discreto original. Por tanto el valor de H es

$$H = Q_c.(Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} B_z & A_z.B_z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1.033 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.1646 & 0.1095 \\ 0.0319 & 0.0531 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \begin{bmatrix} -6.1055 & 31.4207 \\ 3.8312 & 11.5441 \end{bmatrix} \quad .$$

Entonces el valor de $\boldsymbol{k}$ es

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k_c}.H = [5.463 \quad 4.176] \quad .$$

El modelo del motor en ecuaciones de estado modelado en Simulink

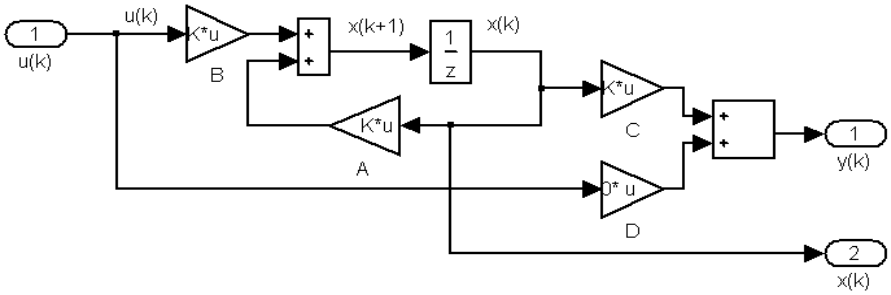

Fig.3: modelo en ecuaciones de estado del motor.

El sistema con controlador de estado de tiempo finito modelado en Simulink:

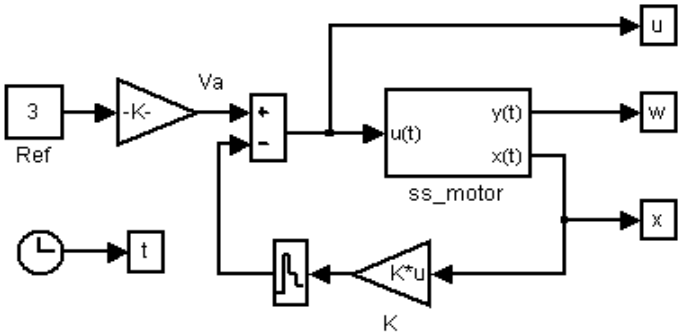

Fig.4: modelo del motor con CETF.

La tensión de armadura *Va* está representada por una referencia y un amplificador cuya ganancia es de 19.194. La función de este último es adecuar 1 a 1 las señales de entrada y salida, es decir, que 1V en la referencia sea equivalente a 1 rad/s de velocidad angular en la salida.

Se grafican las señales de interés ***x****(t), u(k)* y *ω(t)* del motor con controlador de estado de tiempo finito sin referencia:

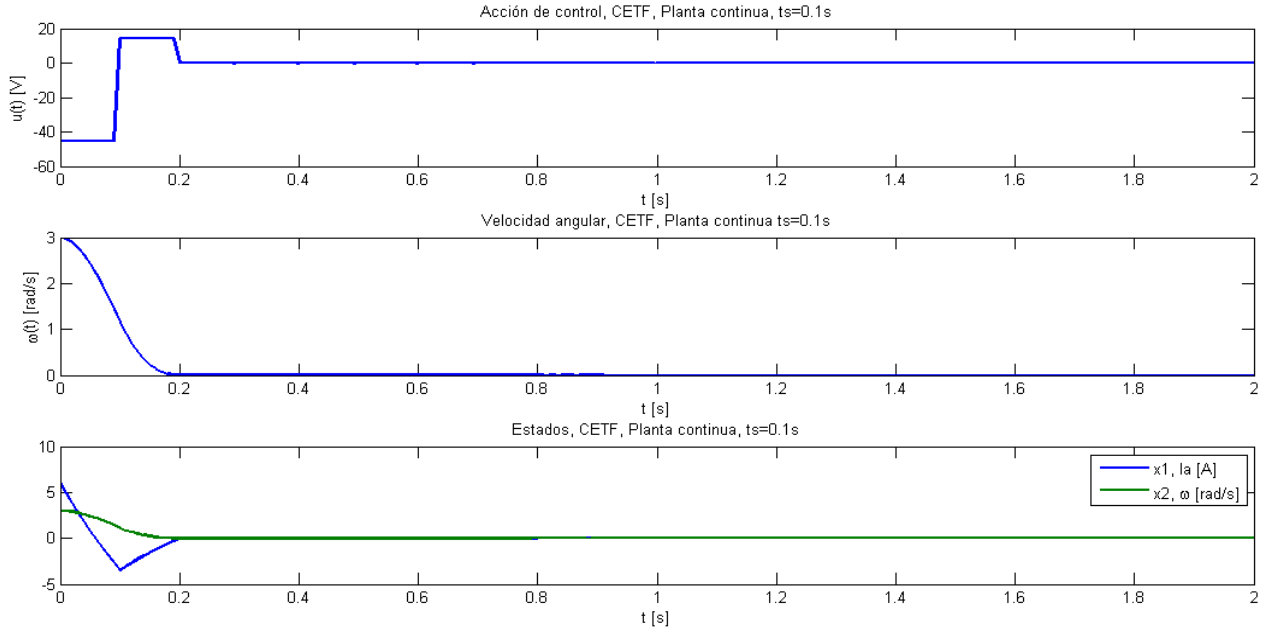

Fig.5: gráficas de señales ***x****(t), u(k)* y *ω(t)* para CETF sin referencia.

Se grafican las señales de interés ***x****(t), u(k)* y *ω(t)* del motor con controlador de estado de tiempo finito con referencia de 3V:

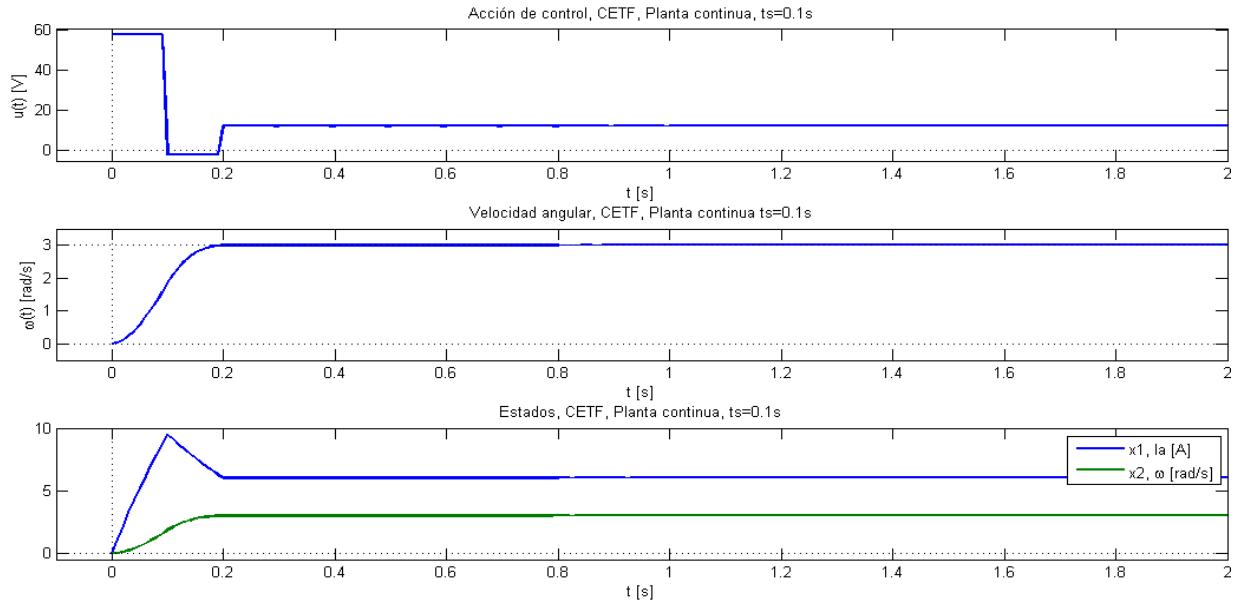

Fig.6: gráficas de señales ***x****(t), u(k)* y *ω(t)* para CETF con referencia.

Se observa que:

- La velocidad angular llega al valor de referencia en 0.2 segundos, equivalente a dos tiempos de muestreos (m = 2), lo cual indica el correcto funcionamiento del CETF. Esto es a costa de elevadas acciones de control, u[0] = 57.59V, y u[1] = -1.9V, comparadas con los 12V necesario para fijar el

valor de la velocidad angular en 3 rad/s.

- La corriente de armadura sufre un transitorio de 10A de valor pico, por lo que se debe corroborar si dicho valor de corriente de armadura podrá ser soportado por el devanado del motor.

2) Diseñar un controlador óptimo. Resolver para referencia igual a cero y distinta de cero.

El diseño del controlador óptimo con referencia a cero se basa en definir un índice de desempeño J que represente una buena solución de compromiso entre elevadas acciones de control y corto tiempo de establecimiento del sistema. El índice de desempeño J para el estado estacionario se define como

$$J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \underbrace{\boldsymbol{x}^T(N)\, S\, \boldsymbol{x}(N)}_{regimen} + \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{x}^T(k)\, Q\, x(k)}_{estados} + \underbrace{\boldsymbol{u}^T(k)\, R\, \boldsymbol{u}(k)}_{acción\,de\,control} \quad ,$$

expresión en la que S, Q y R son matrices de pesos. Minimizando esta expresión y resolviendo se llega a que la ley de control del controlador de estado óptimo está dada por

$$u(k) = -\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}(k)$$

con

$$\boldsymbol{k} = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad ,$$

matriz de ganancia en estado estacionario, y

$$P = Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T PA \quad ,$$

expresión conocida como Ecuación Matricial de Riccati en estado estacionario.

Este controlador también exige que el proceso sea controlable, condición que cumple el proceso dado, como se demostró para el controlador de estado de tiempo finito.

El valor de P se calcula en forma iterativa con MATLAB, haciendo $P = S$ para el primer cálculo de la iteración. Se itera hasta que $\Delta P = P(k+1) - P(k)$ sea los suficientemente pequeña.

Las matrices de peso deben ser simétricas y definidas positivas. Los valores de las mismas se fijan en

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ R = [2],\ Q = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \quad .$$

En particular los valores de R y Q se fijaron haciendo algunas simulaciones y determinando la salida más adecuada para el sistema. Fue un requisito que las acciones de control no superaran los 24V para de esta forma poder sintetizar la acción de control con una fuente de fácil obtención en el mercado

El código en MATLAB:

```
R = 2;
Q = [25 , 0 ; 0 , 25;];
S = [1 , 0 ; 0 , 1;];
P = S;
for i=1:10,
  Ptemp = Q + (A'* P * A) - (A'* P* B) * inv( R + B'*P*B )* B'* P * A;
  Pdelta = Ptemp - P
  P = Ptemp;
end;
K = inv(R + B'* P* B)* (B' * P * A);
```

El valor del vector de ganancia calculado es $\boldsymbol{k} = [1.4719 \;\; 0.1347]$.

Se simula el modelo con Simulink utilizando los modelos de las figuras 3 y 4. Se recalcula el valor de la ganancia del amplificador posterior a la tensión de referencia. Este es de 7.1788.

Se grafican las señales de interés ***x**(t), u(k)* y *ω(t)* del motor con controlador de estado óptimo sin referencia:

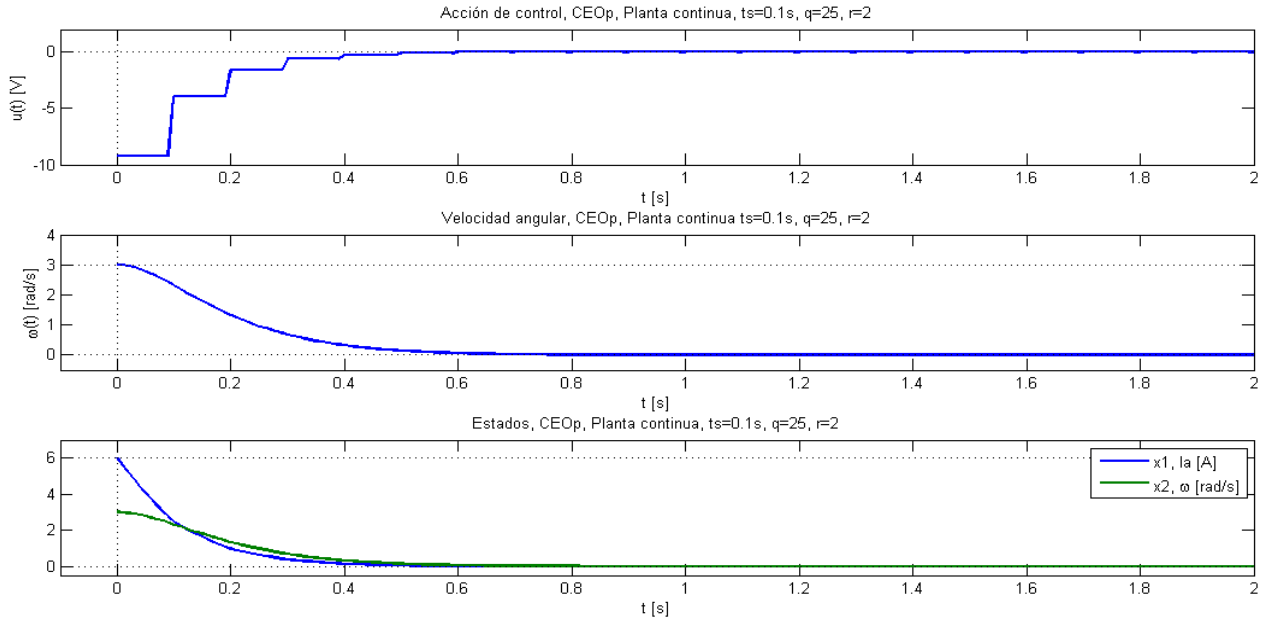

Fig.7: señales ***x**(t)*, *u(k)* y *ω(t)* para el controlador de estado óptimo sin referencia.

Se grafican las señales de interés ***x**(t), u(k)* y *ω(t)* del motor con controlador de estado óptimo con referencia de 3V:

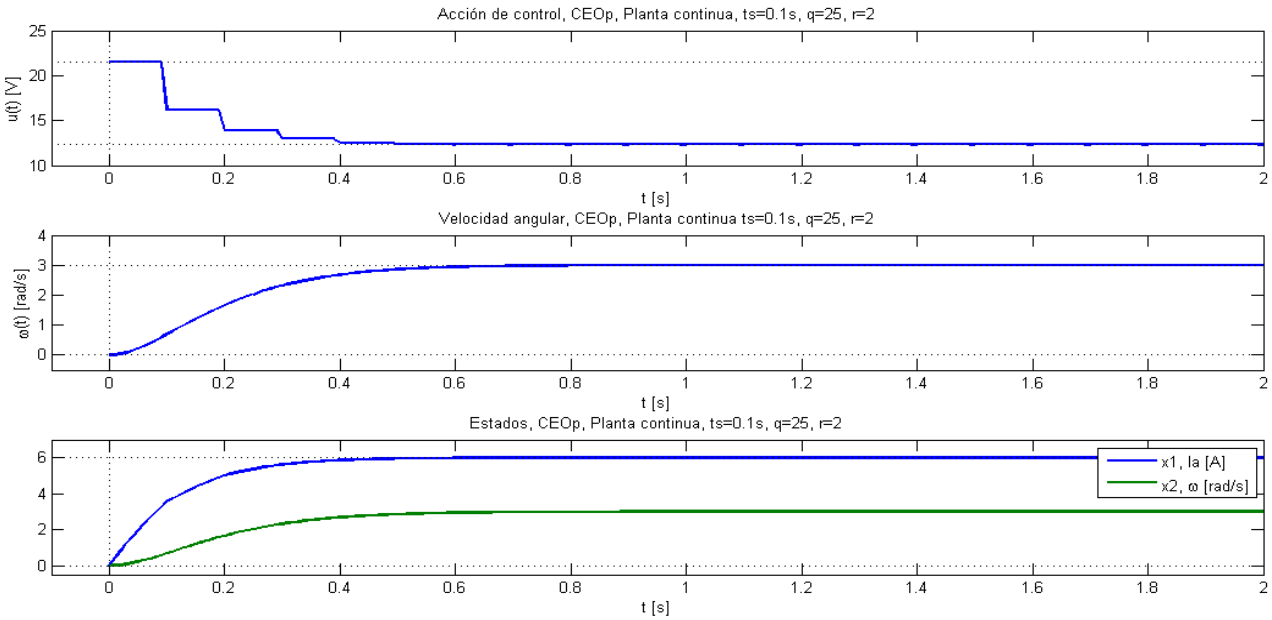

Fig.8: señales ***x(t)***, *u(k)* y *ω(t)* para el controlador de estado óptimo con referencia.

Para los valores de las matrices de peso elegidos se observa que:

- El valor de la velocidad angular llega a su valor de referencia, 3 rad/s, en prácticamente 0.6 segundos, es decir, se ha reducido un 40% dicho tiempo en comparación con el proceso a lazo abierto.
- La mayor acción de control u[0] es de 21.50V. Este valor se estabiliza en 12V pasados los 0.6 segundos. Por tanto, se logra utilizar una fuente de 24V para fijar el valor de la tensión de armadura *Va*.
- El valor de la corriente de armadura no supera los 6A y no se aprecian transitorios.

3) Diseñar un observador de estado y determinar las condiciones de observabilidad.

Un observador de estado exige que el proceso donde será implementado sea observable. Por tanto se debe verificar que el rango de la matriz de observabilidad Q_o sea mayor o igual al orden del sistema $m = 2$.

$$Q_o = \begin{bmatrix} C_z \\ C_z . A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}2516 & 0{,}3656 \end{bmatrix}$$, con $Rango\, Q_o = 2 = m$. Por tanto el sistema es observable.

La matriz de peso *T* del observador de estado u observador de Luenberger hace que los valores de los estados discretos estimados se aproximen lo más rápidamente a los estados reales del sistema continuo. La teoría indica que su cálculo es igual a la matriz de ganancia ***k*** del controlador de estado de tiempo finito, sólo se deben cambiar A_z por A_z^T , B_z por C_z^T y C_z por B_z^T para obtener T^T .

La función de transferencia que surge del modelo de variables de estado aplicando los cambios mencionados es

$$\frac{y_o(z)}{u(z)} = \frac{0.03199\, z + 0.02007}{z^2 - 1.033\, z + 0.2466} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad .$$

Por tanto, los coeficientes del vector de ganancia $\boldsymbol{k_o}$ quedan definidos como

$$\boldsymbol{k_o} = [-a_2 \;\; -a_1] = [-0.2466 \;\; 1.033] \quad .$$

Siendo la matriz de transformación

$$H = Q_o.(Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} . \left[C_z^T \quad A_z^T . C_z^T \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1.033 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0.2516 \\ 1 & 0.3656 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \begin{bmatrix} 3.9743 & 0 \\ 2.653 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Entonces el valor de $\boldsymbol{k}$ es

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k_o}.\, H = [1.7609 \;\; 1.0331] \quad .$$

Finalmente el valor de T

$$T = \boldsymbol{k}^T = [1.7609 \;\; 1.0331]^T = \begin{bmatrix} 1.7609 \\ 1.0331 \end{bmatrix}$$

Se comprueba el funcionamiento del observador de estados modelando el mismo en Simulink, como indica la siguiente figura.

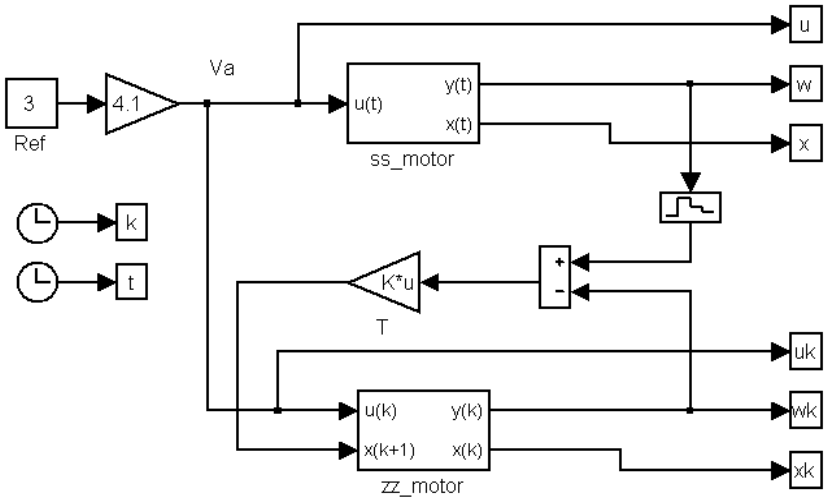

Fig.8: modelo del motor con observador de estado.

Siendo el modelo de variables de estado del observador:

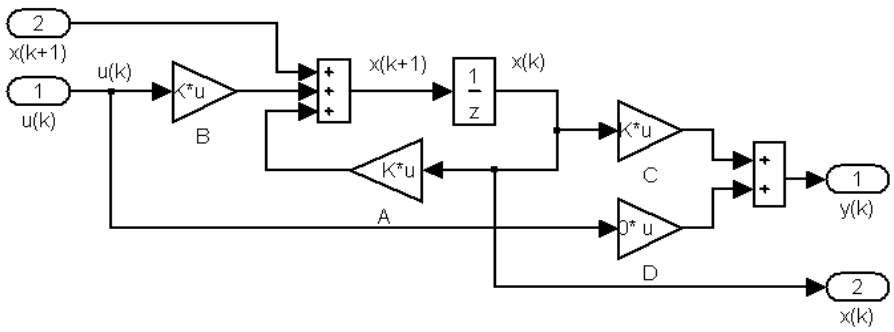

Fig.9: modelo de variables de estado del observador de estado.

La ganancia del amplificador posterior a la tensión de referencia es de 4.1. Se fija el valor del vector de estado del motor en el inicio con los valores que toma este en régimen, es decir $\boldsymbol{x}(0)=[6\ \ 3]$. De esta forma el observador de estado comienza a operar con los valores en régimen del motor.

A continuación se grafican las señales de interés del motor con observador de estados, los estados del proceso $\boldsymbol{x}(t)$, los estados estimados $\hat{\boldsymbol{x}}[k]$ y el error de observación $\tilde{\boldsymbol{x}}[k]$

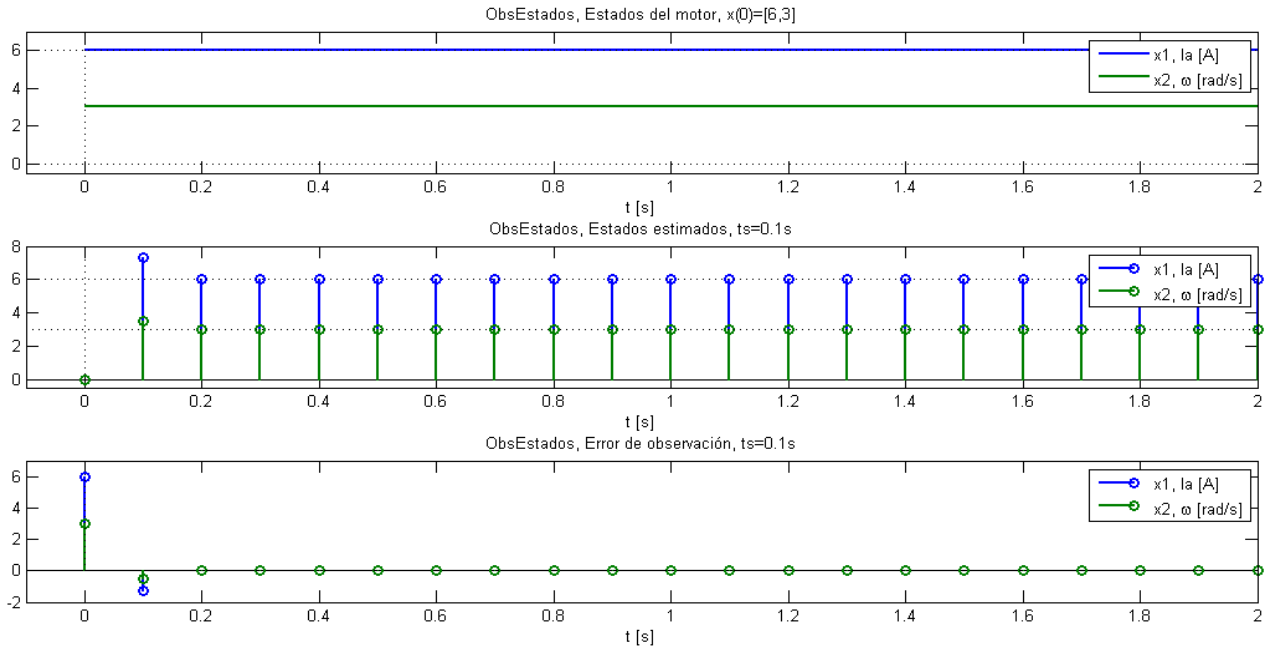

Fig.10: señales $\boldsymbol{x}(t)$, $\hat{\boldsymbol{x}}[k]$ y $\tilde{\boldsymbol{x}}[k]$ del observador de estado.

Como indica la figura 10, el observador de estados se aproxima al valor de los estados del proceso en dos tiempos de muestreo (0.2 segundos), lo que demuestra su correcto funcionamiento.

Ejercicio extra. Controlador con observación de estado con referencia nula

La teoría del controlador con observación de estado con referencia nula indica que las matrices de ganancia $\boldsymbol{k}$ y T pueden calcularse por separado, obteniéndose un sistema completo con orden $2m$, es decir de orden 4 para el proceso dado.

Se utilizan los valores del vector $\boldsymbol{k}$ obtenido para el controlador de estado óptimo y la matriz T obtenida para el observador de estado. Por tanto

$$\boldsymbol{k} = [1.4719 \;\; 0.1347] \quad \text{y} \quad T = \begin{bmatrix} 1.7609 \\ 1.0331 \end{bmatrix} .$$

El modelo del controlador de estado con observador para referencia nula modelado en Simulink

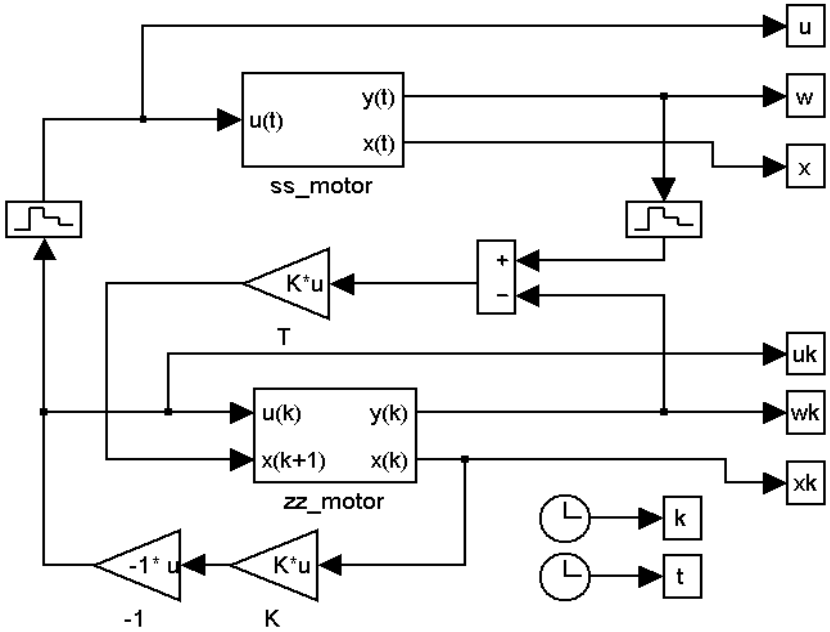

Fig.11: modelo del motor con controlador de estado con observador para referencia nula.

A continuación se grafican las señales de interés del motor con observador de estados. Las señales *u(k)* y *ω(t)*

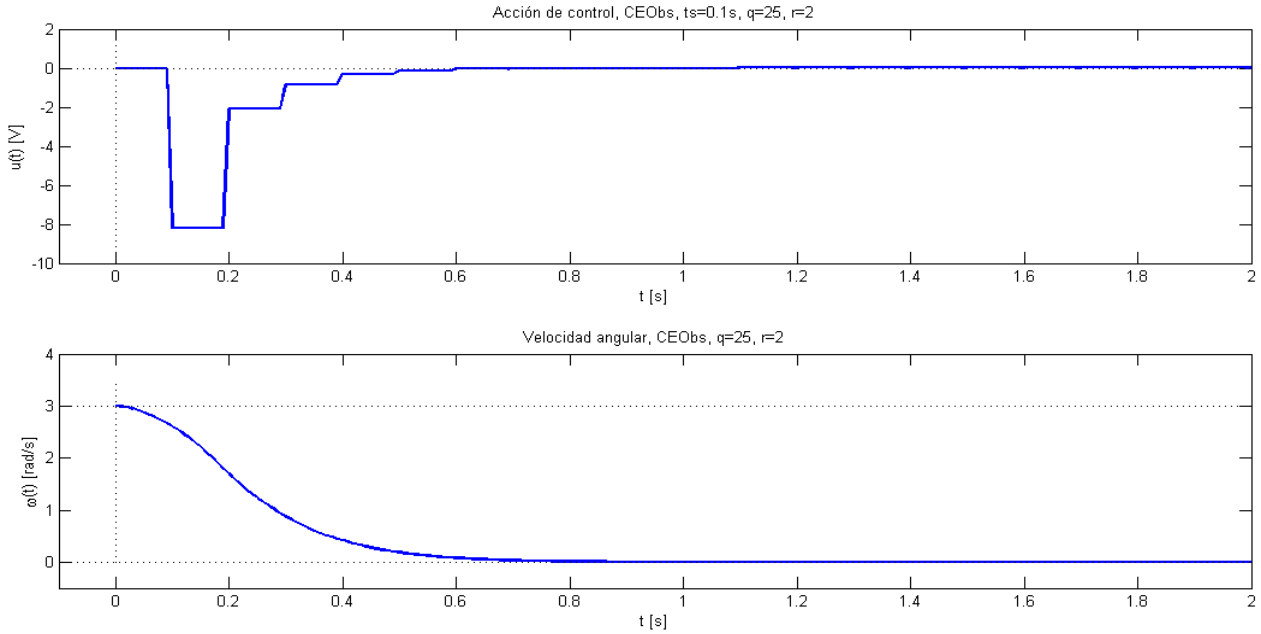

Fig.12: señales *u(k)* y *ω(t)* del controlador de estado con observador con referencia nula.

Las señales de los estados del proceso $\boldsymbol{x}(t)$, los estados estimados $\hat{\boldsymbol{x}}[k]$ y el error de observación $\tilde{\boldsymbol{x}}[k]$:

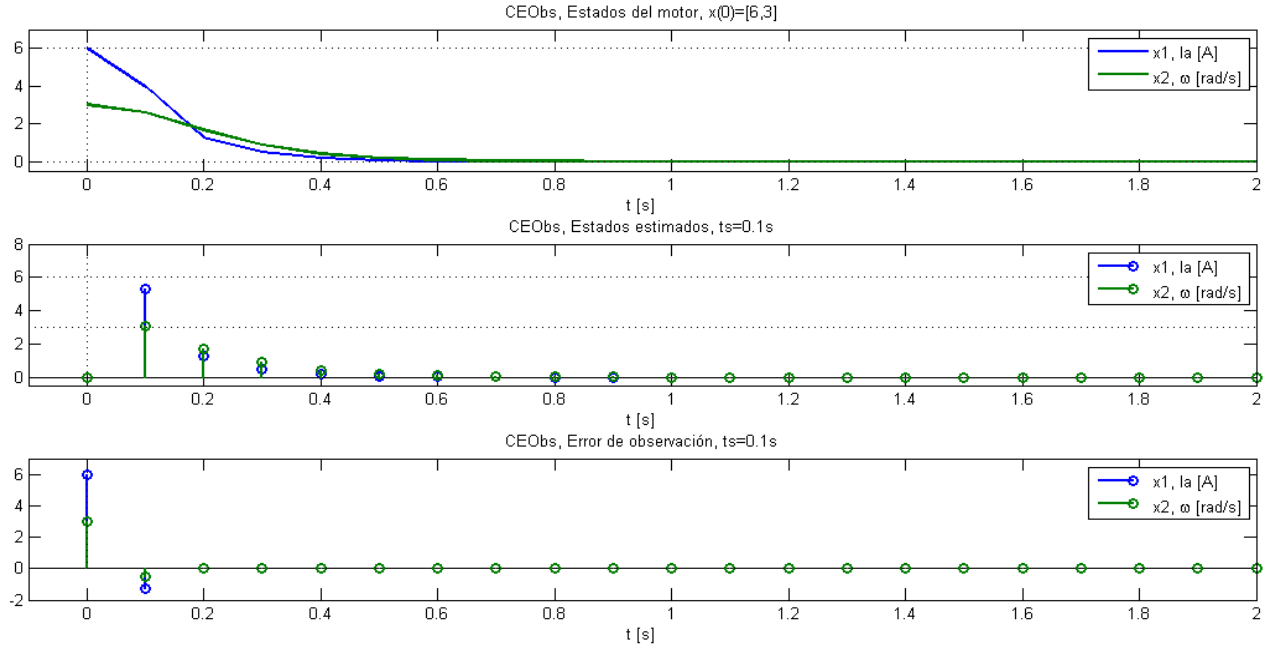

Fig.11: señales $\boldsymbol{x}(t)$, $\hat{\boldsymbol{x}}[k]$ y $\tilde{\boldsymbol{x}}[k]$ del controlador de estado con observador con referencia nula.

A partir de las gráficas se observa que:

- El valor de la velocidad angular llega a su valor de referencia de 0 rad/s en prácticamente 0.7 segundos, en forma suave, reduciéndose un 30% dicho tiempo en comparación con el proceso a lazo abierto.
- La acción de control u[k] con mayor excursión es u[1] = -8.2V.
- El error de observación a los efectos prácticos se anula en 2 periodos de muestreo (0.2 segundos). Por tanto el observador de estado funciona correctamente.